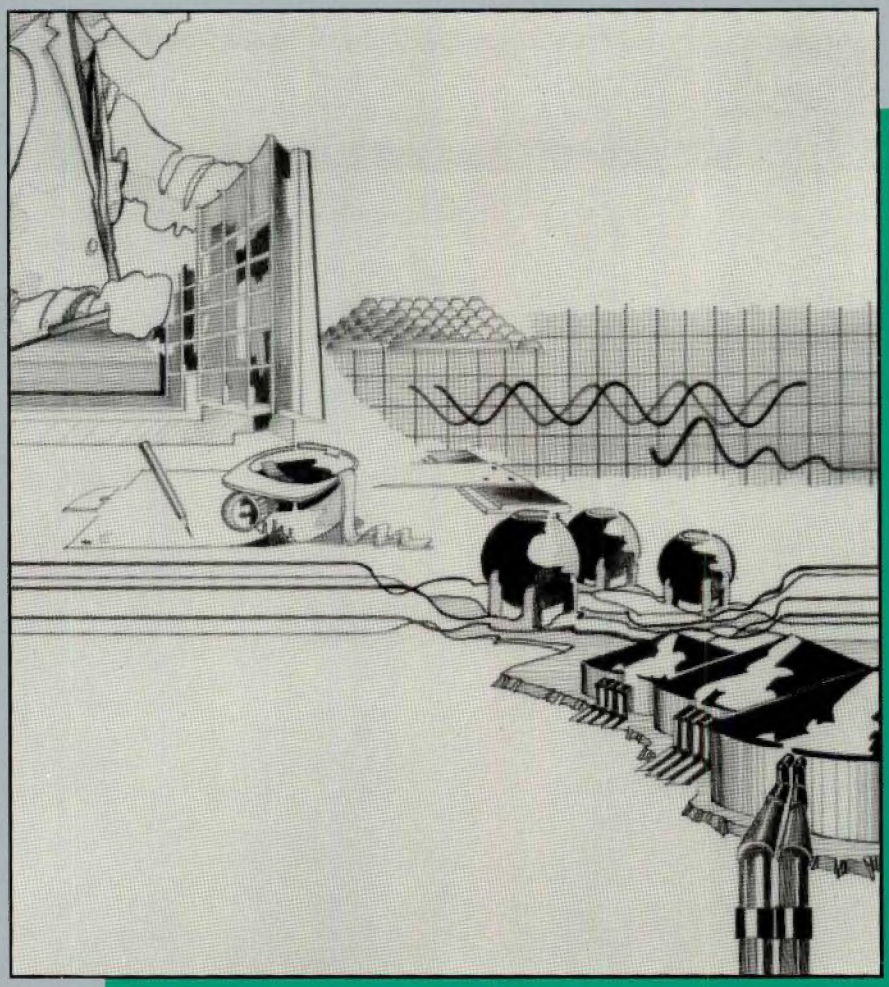
técnica



Revista de Engenharia
Publicação da Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

N.º 2 • 88 - SETEMBRO 1988 - Esc. 150$00

N.º 2 • SETEMBRO DE 1988

técnica Revista de Engenharia
Publicação da Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

PROPRIEDADE DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO • **DIRECTOR:** M. DE ABREU FARO • **COORDENADORES EDITORIAL**: ISABEL ELIAS E HÉLIO SOARES • **DIRECÇÃO E ADMINISTRAÇÃO:** AEIST - Av. Rovisco Pais, 1000 LISBOA - TELS.: 88 93 23/88 10 18 • **PUBLICIDADE** TÉCNICA - AEIST - Av. Rovisco Pais, 1000 LISBOA - TELS.: 88 10 18/89 75 15 • **COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:** CABOGRÁFICA, LDA., Rua das Biscoiteiras, Lote 18 (traseiras) - 2795 LINDA-A-VELHA • PUBLICAÇÃO TRIMESTRAL - 5000 EXEMPLARES • ASSINATURAS (4 números): PORTUGAL 500$00 - ESTRANGEIRO 12 US$.

SUMÁRIO

técnica 2 · 88 SETEMBRO 1988

1 EDITORIAL:

ARTIGOS CONVIDADOS

3 A ESTRUTURA CELULAR DA CORTIÇA: LEIS ESTATÍSTICAS DE FORMAÇÃO DAS CÉLULAS
M. Amaral Fortes e M. Emília Rosa

14 SOBRE A MODELAÇÃO FÍSICA E MATEMÁTICA NAS LICENCIATURAS E PÓS-GRADUAÇÕES EM ENGENHARIA
L. M. B. C. Campos

ARTIGOS

24 MATRIX FORMULATION FOR ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN MULTILAYERED BIANISOTROPIC MEDIA
C. Paiva A. M. Barbosa

NOTAS CIENTÍFICAS

37 FORMATION OF DIFFUSION COATINGS ON IRON AND STEEL: 3 ALUMINIUM, CHROMIUM AND ZINC COATINGS
C. A. C. Sequeira, A. M. G. Pacheco and C. M. G. S. Nunes

59 SOME ASPECTS OF NUT FIELD SINGULARITY
G. D. Rathod & T. M. Karade

62 CONDIÇÃO DE RADIAÇÃO EM MEIOS DE MOVIMENTO
M. J. Martins

66 TERMODINÂMICA: uma visão inovadora
Rodrigo de Abreu

ISSN 0040-1714

- A maior Fábrica de Quadros para o Ensino e Organização de Empresas.
- Fabricamos o quadro DIDAX em porcelana branca para marcadores, em porcelana verde para giz e branco basso para ecrãn e escrita com giz de cor.

Informação:
Utilize a gama de acessórios Didax para uma melhor qualidade do seu trabalho.

DIDAX®

CONSULTE AS CASAS DA ESPECIALIDADE OU:

DIDAX
QUADROS E EQUIPAMENTOS DIDÁCTICOS
PRAÇA DA ILHA DO FAIAL, 1-A
1000 LISBOA
TELEFS. 52 47 76 - 53 92 05 - 57 58 31
TELEX 14189 TETEL P

EDITORIAL

Não se deseja repetir quanto se tem dito relativamente às dificuldades de ordem material.

Ainda subsistem!

No entanto, quanto melhor,numerosa e diversa for a colaboração científica, maior será a legitimidade para conseguir os meios para resolver os problemas equacionados.

Pede-se muita paciência a quantos desejam que a Técnica progrida.

Em matéria de colaboração científica limitamo-nos hoje a um grande apelo:

-Que nos enviem Notas Científicas!!!

A ESTRUTURA CELULAR DA CORTIÇA: LEIS ESTATÍSTICAS DE FORMAÇÃO DAS CÉLULAS

M. AMARAL FORTES e M. EMÍLIA ROSA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MATERIAIS, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex

RESUMO

Descreve-se a estrutura celular da cortiça, dando ênfase à topologia do empilhamento das células prismáticas. As secções da cortiça são redes trivalentes (três arestas em cada nó ou vértice), cujas arestas correspondem às intersecções com as paredes celulares. Analisam-se as secções do ponto de vista topológico e indicam-se valores experimentais das fracções f_i de células com i arestas (lados) em secções paralelas e perpendiculares à direcção radial.

Em seguida procura-se modelizar a formação e crescimento das células na cortiça. A disposição das células em secções tangenciais (perpendiculares à direcção radial) é correlacionada com a divisão celular não-diferenciada do felogénio produtor das células. Conclui-se que apenas células com 7 ou mais lados sofrem divisão no felogénio, originando células-filhas cujas áreas diferem, no máximo, de um factor $\simeq 3$. A modelização do crescimento na direcção radial permite concluir que as células de cortiça são geradas independentemente umas das outras, com alturas no intervalo 0,4h-h, em que h é a altura máxima das células. Àparte esta restrição, as alturas das células têm uma distribuição uniforme (igual probabilidade de todas as alturas no intervalo referido).

ABSTRACT

The cellular structure of cork is described, with emphasis on the topology of cell packing. The sections of cork are trivalent networks (three edges at each node or vertex), the edges of which are the intersections with the cell walls. The sections are analysed from a topological point of view and experimental values of the fractions f_i of cells with i edges (sides) are indicated for sections parallel and perpendicular to the radial direction.

An attempt is made to model the formation and growth of cells in cork. The arrangement of cells in tangential sections (perpendicular to the radial direction) is correlated with the undifferentiated cell division of the phellogen, the tissue that originates the cork cells. It is concluded that division occurs in this tissue exclusively in cells with 7 or more sides, the areas of the daughter-cells differing by a factor of $\simeq 3$, at most. The modelling of growth in the radial direction leads to the conclusion that cork cells are produced independently of each other, with heights in an interval 0.4h-h, where h is the maximum height of a cell. Except for this restriction, the cell heights have a uniform distribuction (equiprobability of cell heights in the allowed interval).

1 - INTRODUÇÃO

A cortiça pertence a uma classe de materiais designados por materiais celulares [1] (ou "espumas") [1], que inclui os polímeros expandidos (poliuretano expandido, esferovite, etc.), as estruturas em favo-de-mel usadas na indústria aeronáutica, e... o pão. Todos estes materiais são formados por células [1] ocas, de dimensões lineares variando, conforme os casos, entre alguns μm e alguns cm. As células podem ser abertas ou fechadas, isto é, podem comunicar ou não umas com as outras. Toplogicamente, as células são poliedros, que se contactam ao longo de faces (dois em cada face), arestas (três em cada aresta) e vértices (quatro em cada vértice). Se as faces não estiverem completamente desenvolvidas, a estrutura é aberta. Se faltarem completamente as faces, a estrutura é formada por pequenas vigas (ou arestas), ligadas em nós (ou vértices). Nestes casos pode ser difícil, ou mesmo impossível, individualizar células poliédricas, mas o termo "celular" continua a ser aplicado a estes materiais, de que é exemplo a esponja natural.

2 - ESTRUTURA CELULAR DA CORTIÇA

Na cortiça, as células são fechadas, de forma prismática, e são células no sentido biológico do termo. São células mortas e ocas, geradas por um tecido - o felogénio [2] - que se encontra sob a cortiça, no sobreiro (Fig. 1a). Este tecido tem uma pequena espessura (uma célula, apenas) e gera células de cortiça para fora e células de feloderme (semelhantes às da madeira) para o interior. O felogénio tem portanto capacidade meristemática, isto é, pode dividir-se originando células diferenciadas (de dois tipos), para um e outro lado do tecido.

Além disso, o felogénio sofre divisão celular não diferenciada, originando-se novas células de felogénio necessárias ao crescimento deste tecido. Quando inicialmente se forma nas extremidades do tronco, o felogénio desenvolve-se por divisão celular predominantemente segundo planos transversais (ver Fig. 1b para nomenclatura dos planos ou secções), para permitir o crescimento em altura. Quando o crescimento em altura cessa, a divisão celular ocorre segundo planos radiais, para permitir o crescimento tangencial (isto é, o engrossamento). De modo que as células existentes no felogénio, numa dada região e num dado momento, resultaram de células-mães por divisão celular em duas direcções mutuamente perpendiculares. Estas características da divisão celular não-diferenciada do felogénio são importantes se se pretender modelizar o crescimento deste tecido, o que faremos neste artigo.

As células de cortiça são empilhadas em colunas, de eixo paralelo à direcção radial da árvore (Fig. 1b). Cada célula do felogénio gera, uma a uma, as células de cortiça de uma coluna.

Numa secção perpendicular à direcção radial - designada por secção tangencial - observa-se uma disposição do tipo "favo-de-mel", com células poligonais, relativamente regulares (Figs. 1b e 2a). Esta disposição é idêntica à das células do felogénio visto que cada célula deste tecido origina uma coluna de células de cortiça. O número de lados de cada célula poligonal é variável (Fig. 2a). Mas em cada vértice encontram-se sempre três células e, portanto, três arestas (lados das cēlulas), o que significa que a rede bidimensional observada na secção tangencial é uma rede trivalente (três arestas em cada vértice).

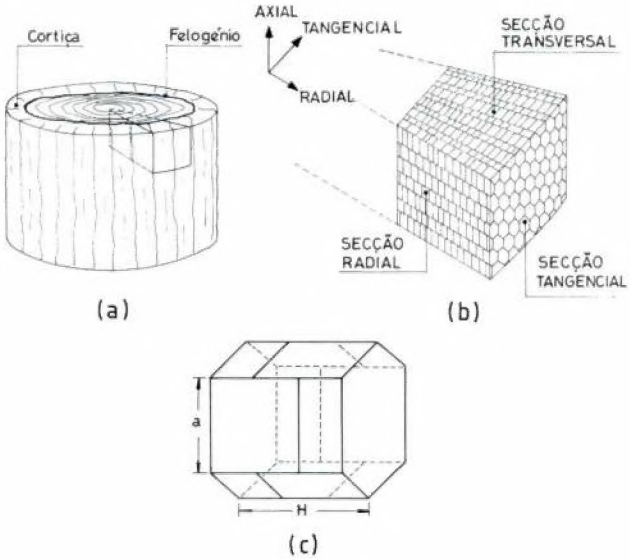


FIGURA 1

Fig. 1-a) Esquema do tronco do sobreiro, mostrando a camada exterior de cortiça, gerada pelo felogénio. b) Esquema da estrutura celular da cortiça mostrando as células prismáticas (não necessariamente hexagonais) empilhadas em colunas, com bases desencontradas. Indica-se também a nomenclatura usada para as direcções e para as secções. c) Uma célula é contactada nas faces laterais pelas bases das células vizinhas; dimensões típicas: $H \simeq 35\mu m$, $a \simeq 14\mu m$.

As células em colunas adjacentes (geradas por células adjacentes do felogénio) não têm as bases no mesmo plano (Figs. 1b, c e 2b). Em princípio, cada célula do felogénio gera células de cortiça de uma forma independente da das células de felogénio adjacentes, de modo que não há correlação entre as alturas das células de cortiça adjacentes. O resultado

(1) Os termos célula e celular não são usados aqui no sentido biológico.

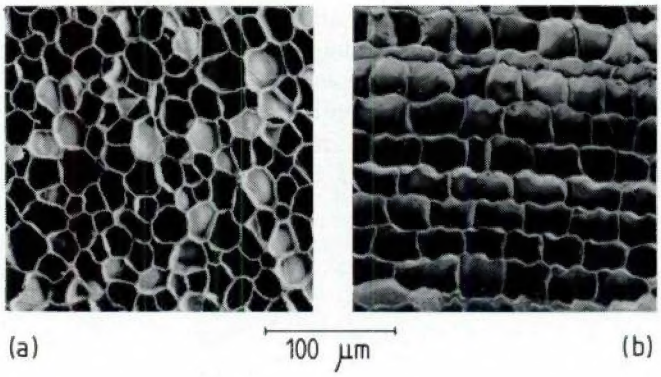


FIGURA 2

Fig. 2 Secções da cortiça observadas no microscópio electrónico de varrimento: a) secção tangencial; b) secção radial.

é um empilhamento desencontrado nas várias colunas (Figs. 1b, c), como se pode verificar na secção radial da Fig. 2b. Esta secção contém a direcção vertical, ou axial (eixo da árvore), e a direcção radial. Mas qualquer secção que tenha a direcção radial tem o mesmo aspecto. A direcção radial é uma direcção de simetria da estrutura da cortiça. Designaremos por secções radiais todas as que contêm a direcção radial. Todas estas secções têm a estrutura em ladrilho que se pode observar na Fig. 2b, e que pode ser descrita (embora com alguma "agressão" à topologia) como um empilhamento desencontrado de rectangulos. A "agressão" à topologia tem a ver com o facto de , nestas secções, cada célula ter um número de lados (e vértices) geralmente superior a 4, não sendo portanto rectangular no sentido topológico. De facto, tal como na secção tangencial, cada célula é um polígono com um número de lados e vértices variável (Fig. 2b), mas há sempre três arestas em cada vértice. Quer dizer, topológicamente as duas secções são muito parecidas, embora geometricamente seja notória a diferença entre elas.

Um aspecto importante da estrutura celular da cortiça é o ondulamento das paredes laterais das células, observável na Fig. 2b [3, 4]. As bases das células também não são planas, mas em geral não apresentam ondulações. Estas irregularidades são resultado do modo de crescimento da cortiça, com as novas células geradas pelo felogénio a ter de empurrar as células já formadas. As paredes celulares sofrem flexão e encurvadura (mas não fractura!) devido a estas tensões de crescimento. Mas a verdade é que as células são geradas com o tamanho correcto para poderem ser direitas e planas. Quer dizer, se não fosse a necessidade de empurrar células já formadas, a cortiça teria células de paredes planas, paralelas e perpendiculares à direcção radial. Que isto é assim, infere-se da Fig. 3, onde se mostram as secções tangencial e radial de cortiça após aquecimento durante 1h a 300° C, ao ar. O aquecimento provoca o endireitamento das paredes, ao mesmo tempo que a cortiça expande e se removem as tensões internas de crescimento.

Para completar esta breve descrição da estrutura celular da cortiça, convém referir ainda que as dimensões das células variam com a época do ano em que se formam, mas são, em média, as seguintes [4]: altura 30-40 μm; aresta de base: 13-15 μm; espessura da parede celular: 1-2μm. As células de cortiça são mais pequenas do que as dos materiais celulares artificiais.

As células poliédricas (prismáticas) na cortiça contactam as células adjacentes através das faces, sendo o número médio de células adjacentes de uma dada célula $\simeq 14$, como se pode inferir da descrição feita (Fig. 1c). (De facto o número 14 é o resultado correcto se não houver qualquer correlação entre a altura e o número de faces laterais das células [4]).

Neste artigo procuraremos modelizar a divisão celular do felogénio de modo a que conduza às distribuições f_i (fracção de células com i lados) observadas nas secções tangenciais e radiais da cortiça (Tabela 1). As "leis" de divisão celular que terão de ser introduzidas na modelização para obter as distribuições correctas, são, como veremos, leis plausíveis, mas não será feita qualquer tentativa de explicação física ou biológica da necessidade dessas mesmas leis. Não obstante, a análise que iremos fazer permite descortinar algumas características "médias" dos fenómenos de divisão celular não-diferenciada e diferenciada, as quais são de utilidade para uma análise mais aprofundada desses fenómenos.

Preocupar-nos-emos exclusivamente com a topologia das células e não com a sua geometria; em particular, as ondulações das paredes serão irrelevantes na discussão que se segue. As

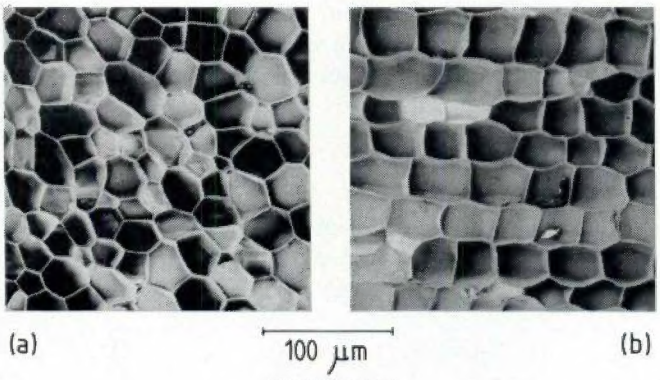


FIGURA 3

Fig. 3 Efeito do aquecimento na estrutura da cortiça. Compare-se com a Fig. 2 e note-se o endireitamento das paredes celulares: a) secção tangencial ; b) secção radial.

características geométricas são igualmente importantes e poderiam ser estudadas de uma forma semelhante ao que se fará para as características topológicas. São no entanto mais difíceis de medir, particularmente devido à irregularidade geométrica das células, resultante das ondulações das paredes.

3 - TOPOLOGIA DAS SECÇÕES

Em qualquer secção as células são poligonais, com um número de lados (arestas), ou de vértices, variável de célula para célula. Nas secções radiais, em ladrilho, o número de vértices (e portanto de arestas) de uma célula inclui os vértices em que se juntam a essa célula as arestas das células em colunas adjacentes. Na Fig. 4 indicam-se os números de lados (ou vértices) de células em redes que são geometrica e topologicamente semelhantes às que se observam nas secções tangenciais e radiais.

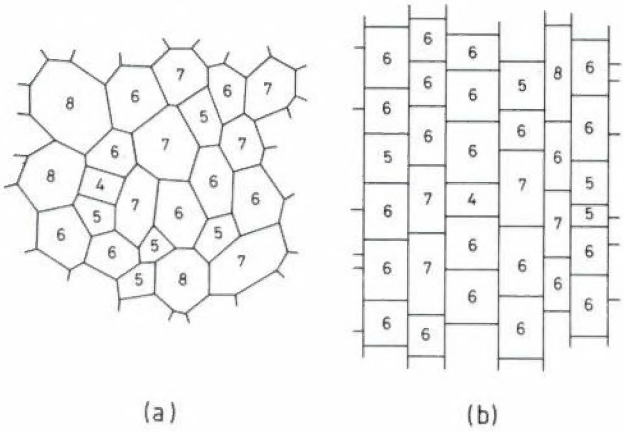


FIGURA 4

Fig. 4 Redes trivalentes, análogas às que se observam nas secções da cortiça: a) tangencial; b) transversal ou radial. Está indicada a poligonalidade de cada célula.

Como já se referiu, em qualquer secção os vértices são trivalentes, isto é, há 3 arestas em cada vértice. Por isso, se for A o número de arestas e V o número de vértices, tem-se:

$$2A = 3V \qquad (1)$$

Por outro lado, a equação de Euler relaciona o número F de células (ou faces, na designação topológica) com A e V:

$$F + V = A \qquad (2)$$

desde que o número de células seja grande. Combinando as duas equações anteriores obtém-se $2F = V$; como há 3 células em cada vértice, o número médio de vértices por célula é $3V/F = 6$. Isto é, tomando um grande número de células e determinando a fracção f_i de células com i lados (i-células), tem-se:

$$\sum_i f_i = 1$$

$$<i> = \sum_i i f_i = 6 \qquad (3)$$

Uma estrutura celular bidimensional com vértices trivalentes terá a máxima ordem topológica se todas as células tiverem 6 lados. Na Fig. 5a,b indicam-se duas variantes geométricas desta estrutura com $f_6 = 1$, que são, respectivamente, semelhantes à secção tangencial e às secções radiais. As redes da Fig. 5a,b têm uma considerável ordem geométrica. Na Fig. 5c,d mostram-se estruturas semelhantes , ainda com a máxima ordem topológica,mas sem qualquer ordem geométrica.

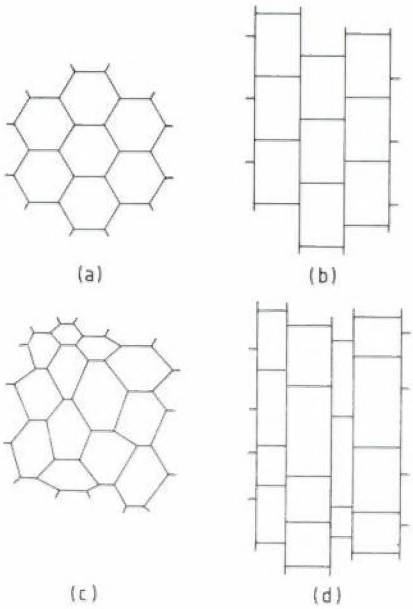


FIGURA 5

Fig. 5 Redes trivalentes com todas as células hexagonais: a) e b) têm ordem elevada; c) e d) são desordenadas.

A desordem topológica de uma rede bidimensional trivalente pode ser medida pelo segundo momento, μ_2, da distribuição f_i em relação à média:

$$\mu_2 = \sum_i (i-6)^2 f_i = \langle (i-6)^2 \rangle \qquad (4)$$

A ordem máxima corresponde a $\mu_2 = 0$. Em redes bidimensionais μ_2 pode variar entre zero e infinito.

TABELA 1
Distribuição de poligonalidades nas secções da cortiça

	Tangencial	Radial
f_4	0,020	0,025
f_5	0,250	0,215
f_6	0,478	0,544
f_7	0,216	0,175
f_8	0,034	0,039
f_9	0,002	0,002
μ_2	0,703	0,664

Na Tabela 1 indicam-se as distribuições f_i para os dois tipos de secções, e os respectivos μ_2. Estes valores foram obtidos numa única amostra, mas medidas noutras amostras indicam que eles são característicos da cortiça. Os valores relativamente baixos de μ_2 reflectem uma certa ordem no arranjo das células, que iremos estudar com mais pormenor. É de notar a ausência de células com 2 ou 3 lados e a raridade de células com 9 ou mais lados. É de referir ainda que as células com mais lados são em geral as de maior dimensão, mas não sistematicamente.

4 - SECÇÃO TANGENCIAL: DIVISÃO NÃO-DIFERENCIADA DO FELOGÉNIO

Como se referiu já, a disposição das células de cortiça na secção tangencial reflecte a disposição das células do felogénio que as produz. O felogénio é um tecido bidimensional, que cresce por divisão celular (não-diferenciada), isto é, por divisão das células "ao meio", acompanhada de crescimento celular. Esta divisão nada tem a ver com a divisão diferenciada que gera as células de cortiça. Do ponto de vista topológico, há que procurar um modelo de divisão celular que conduza a um tecido com a distribuição f_i da secção tangencial da cortiça, indicada na Tabela 1. Uma célula com i lados origina por divisão duas células com i_1 e i_2 lados, sendo (Fig. 6):

$$i_1 + i_2 = i + 4 \qquad (5)$$

Pode concluir-se que no felogénio não ocorrem divisões conducentes a células com 3 ou 2 lados (Fig. 6b,c) visto que as células deste tipo não são observadas na secção tangencial da cortiça.

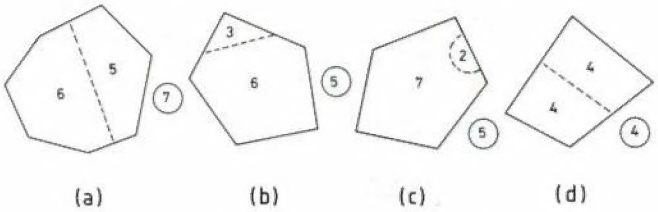


FIGURA 6

Fig. 6 Exemplos da divisão celular em células bidimensionais. O número de lados i_1, i_2, das células-filhas está indicado, bem como o número i de lados da célula-mãe (número com círculo). É sempre $i = i_1 + i_2 - 4$. No felogénio não aparecem células com dois ou três lados (respectivamente b e c), nem há divisão de células com menos de 7 lados.

Por outro lado, devem ser raras as divisões de células com 4 lados, as quais conduziriam a duas células adjacentes com 4 lados (Fig. 6d), o que também não se observa na secção tangencial.

Na modelização, ou simulação, que iremos fazer da divisão celular não-diferenciada do felogénio, admitiremos primeiro que a divisão ocorre apenas em duas direcções mutuamente perpendiculares daquele tecido, o que se coaduna com as características da divisão celular mencionadas na Introdução. Consideremos então um quadrado de la-do unitário (Fig. 7) e tomemos nele um ponto P ao acaso, escolhendo um par de números aleatórios x, y, no intervalo (0, 1), para coordenadas do ponto (todos os valores no intervalo (0, 1) são equiprováveis). O quadrado é dividido em dois por um segmento passando por P e paralelo a x ou y, ao acaso (igual probabilidade de uma e de outra): Fig. 7a.

O processo de fragmentação continua da mesma forma (Fig. 7b), tomando sucessivos pontos ao acaso e dividindo, paralelamente a x ou y, a célula onde o ponto se localiza. Por este processo atingir-se-á eventualmente um estado estacionário, isto é, uma situação em que não há alteração expectável de f_i quando ocorrem divisões de mais células. Na Fig. 7c mostra-se o resultado de uma fragmentação de acordo com este modelo, e contendo 50 células. A distribuição f_i correspondente (Tabela 2, coluna B) está muito longe da que se observa na secção tangencial da cortiça (Tabela 2, coluna A). De facto, e se bem que não haja células com menos de 4 lados (o que é inerente ao modelo), a fracção de 4- células é demasiado grande, como se pode ver na Tabela 2, comparando as colunas A e B. Neste modelo a

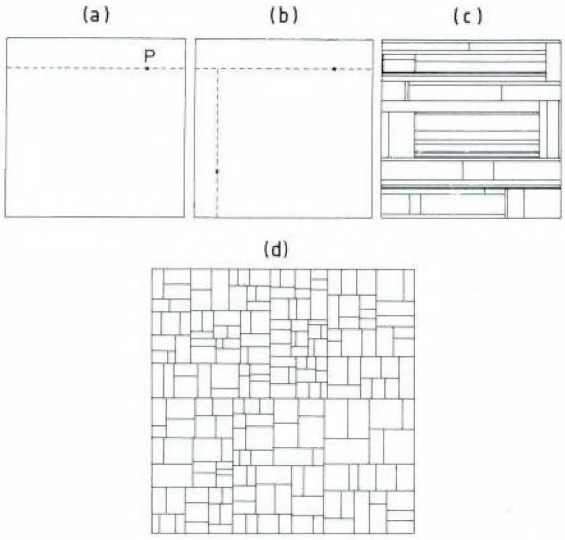


FIGURA 7

Fig. 7 Divisão de um quadrado por sucessivas divisões celulares: a), b), indicam o modo de efectuar as divisões, após localização de um ponto P, ao acaso; c) mostra o resultado de 50 divisões, sem qualquer restrição quanto às células que sofrem divisão e ao modo como se dividem; d) resultado de $\simeq 200$ divisões com as restrições indicadas no texto, o que conduz a uma distribuição de poligonalidades muito semelhante à da secção tangencial da cortiça.

probabilidade de divisão celular é proporcional à área das células, o que é plausível, mas a divisão ocorre com equiprobabilidade dos tamanhos das duas células-filhas, o que é pouco plausível. Na verdade, é de esperar uma divisão mais ou menos a meio.

Este modelo de divisão celular pode ser melhorado, introduzindo uma ou mais das seguintes restrições:

TABELA 2

Distribuição de poligonalidades na secção tangencial, obtidas com diferentes modelos de divisão celular

	A	B	C	D	E	F	G
f_4	0,020	0,54	0,027	0	0,015	0,060	0,029
f_5	0,250	0,12	0,383	0,262	0,235	0,290	0,225
f_6	0,478	0,08	0,302	0,503	0,525	0,400	0,510
f_7	0,216	0,12	0,174	0,201	0,195	0,170	0,157
f_8	0,034	0,02	0,094	0,034	0,035	0,080	0,059
f_9	0,002	0,02	0,013				0,020
f_{10}		0,02	0,007				
f_{11}		0,02					
f_{12}		0,02					
f_{13}		0,02					
f_{14}							
f_{15}		0,02					

Identificação das colunas
A - Valores experimentais
Simulação do tipo da Fig. 7-c:
B - Divisão celular em $i \geq 4$; f = 1; nº de células, n ≈ 50

Simulações do tipo da Fig. 7-d:
C - $i \geq 6$; f = 1/3; n ≈ 150
D - $i \geq 7$; f = 1/3; n ≈ 150
E - $i \geq 7$; f = 1/2; n ≈ 200

Simulação do tipo da Fig. 8-a:
F - $i \geq 7$; f = 1/2; n ≈ 100
Simulação do tipo da Fig. 8-b
G - $i \geq 7$; f = 1/2; n ≈ 100

1 - Tamanho mínimo para que ocorra divisão; este tamanho tem de ser definido em relação à área média das células, uma vez que no modelo, o crescimento das células está "congelado".

2 - Restrições relacionadas com o número de lados das células que podem dividir-se, p. ex., admitir que só se dividem células com 6 ou mais lados.

3 - Divisão segundo a menor dimensão, isto é, o segmento introduzido na divisão é paralelo à menor dimensão da célula.

4 - O segmento que origina a divisão situa-se na região central da célula, cuja largura é uma fracção, f, da largura total da célula. Admitiremos que todas as divisões nesta região são equiprováveis. As células-filhas têm áreas que diferem, quanto muito, de um factor (1 + f)/(1-f).

Foram efectuadas simulações da divisão celular, introduzindo várias restrições do tipo acima indicado. Em todos os casos foram geradas 100 células e determinados os f_i. Nalguns casos continuou-se a simulação até 150 células, não se verificando variações significativas dos f_i. Os valores apresentados podem pois considerar-se representativos de um estado estacionário.

Na Tabela 2 indicam-se alguns exemplos de resultados obtidos em diversas condições, indicadas junto da Tabela. Verifica-se que os valores da coluna E são bastante próximos dos valores observados na secção tangencial da cortiça (Tabela 2, coluna A): Aqueles valores foram obtidos nas seguintes condições:

a) escolha da célula que sofre divisão - probabilidade proporcional à área, isto é, toma-se um ponto ao acaso e efectua-se a divisão na célula em que o ponto se situa;

b) divisão só em células com 7 ou mais lados;

c) divisão perpendicularmente à maior dimensão, ocorrendo na região central com f = 1/2.

Na Fig. 7d mostra-se o resultado de uma simulação nestas condições. A distribuição f_i correspondente figura na coluna E da Tabela 2.

Admitiu-se até agora que a divisão celular pode ocorrer em duas direcções mutuamente perpendiculares, com igual probabilidade. Para ver até que ponto esta restrição influencia os valores finais de f_i, efectuaram-se duas outras simulações em que apenas se alterou a condição relativa às direcções de divisão celular (isto é, as outras condições, a, b, c, acima indicadas foram mantidas; a maior dimensão de uma célula é a maior corda da célula). Na primeira

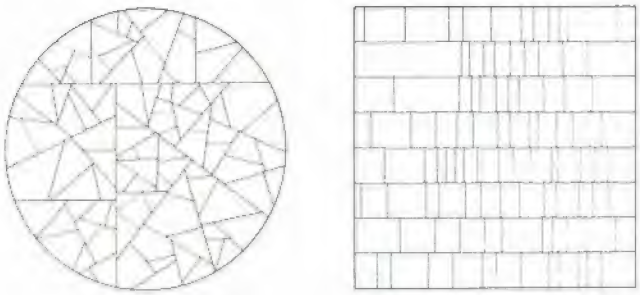


FIGURA 8

Fig.8 a)Divisão celular segundo a direcção perpendicular à maior corda da célula que se divide; b) divisão celular exclusivamente numa direcção.

destas simulações fizeram-se sucessivas divisões dum círculo , o que conduz a uma distribuição aleatória da orientação das paredes celulares (Fig. 8a). Na outra simulação, admitiu-se apenas uma orientação possível de divisão, tendo-se partido de uma rede de rectas perpendiculares à direcção de divisão (Fig. 8b). Em qualquer das duas simulações as distribuições f_i resultantes ao fim de 50-100 divisões são muito próximas das obtidas com divisão em duas direcções perpendiculares. As distribuições f_i correspondentes figuram nas colunas F e G da Tabela 2, respectivamente. Conclui-se que a topologia resultante da divisão celular não é afectada pela geometria inicial nem pela orientação em que é feita a divisão. Em particular, a frequência (ou peso) relativa das divisões celulares no felogénio, na direcção axial e na direcção tangencial, não tem incidência sobre a topologia resultante.

5 - SECÇÕES RADIAIS

A estatística topológica do arranjo celular nestas secções é mais fácil de modelizar. Cada célula do felogénio produz células de cortiça, uma após outra. Admitamos que as células têm alturas no intervalo (ξ, 1)* e que todas as alturas neste intervalo são equiprováveis. As células vão sendo produzidas com alturas ao acaso. Esta hipótese é razoável, embora seja possível a existência de uma correlação entre a altura média das células de uma coluna e a área da célula de felogénio que as origina. Admitiremos, pois, que a probabilidade $p(x)d(x)$ de uma célula de cortiça ter uma altura no intervalo x, $x+dx$ é uniforme no intervalo $[\xi,1]$, isto é:

$$p(x) = \frac{1}{1-\xi} \qquad \xi \leq x \leq 1$$

$$p(x) = 0 \qquad x < \xi;\ x > 1 \tag{6}$$

O problema do arranjo topológico das células reduz-se a um problema de probabilidade geométrica. Há uma distribuição D de segmentos adjacentes numa recta (Fig. 9a), com uma distribuição $p(x)$ de comprimentos ($x<1$).

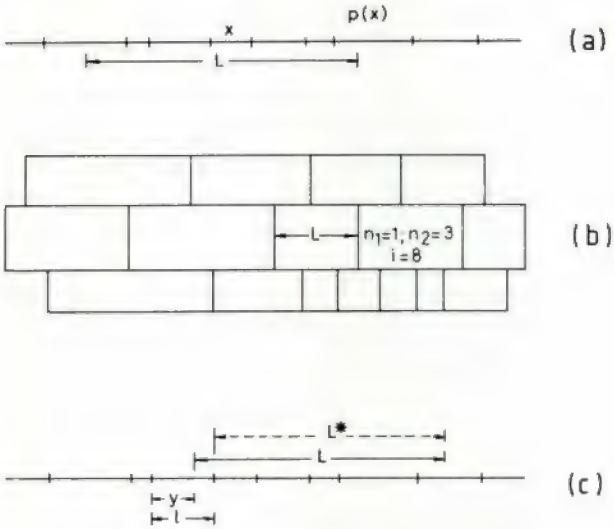


FIGURA 9

Fig.9 a) Distribuição de segmentos numa recta, com uma distribuição $p(x)$ de comprimentos x. L é um segmento colocado sobre a recta, contendo 6 ponto-E. b) Uma célula da fiada central tem um número de lados que depende do número (n_1,n_2) de pontos E, em fiadas adjacentes, dentro da célula. .c) Definição de L^* e de outras quantidades usadas na dedução do Apêndice.

As extremidades destes segmentos são designadas por pontos-E. Consideremos um segmento de comprimento $L(L \leq 1)$ colocado ao acaso na recta (todas as posições da extremidade esquerda, por exemplo, de L são equiprováveis). Qual é a probabilidade de L conter exactamente n pontos-E? Designaremos essa probabilidade por $P(n, L)$. No apêndice calcula-se $P(n, L)$, relacionando-a com $p(x)$, eqs. 21-23.

Voltando ao problema topológico das secções radiais, consideremos uma célula de altura L que

* - Isto é, o cociente entre a altura mínima e a altura máxima é ξ. A distribuição de poligonalidades nas secções paralelas à direcção radial depende então apenas de ξ e não do valor da altura máxima a qual pode considerar-se unitária

contém (n_1, n_2) vértices adicionais de cada lado (Fig. 9b), resultantes do contacto com células adjacentes. A poligonalidade i dessa célula é:

$$i = n_1 + n_2 + 4 \qquad (7)$$

O número expectável de células contendo (n_1, n_2) vértices adicionais é

$$\frac{\alpha}{1-\xi}\int_{\xi}^{1} P(n_1, L)\, P(n_2, L)\, dL \qquad (8)$$

com $\alpha = 1$ para $n_1 \neq n_2$ e $\alpha = 2$ para $n_1 = n_2$. A fracção de células com i lados obtém-se finalmente somando as quantidades (8) para todas as decomposições (n_1, n_2) de i compatíveis com a eq. 7.

No caso da cortiça verifica-se que não há células com mais de 10 lados, o que significa não haver mais do que 3 vértices adicionais de cada lado, ou seja, $\xi > 1/3$. Por outro lado, a existência de células com 8 lados implica $\xi < 1/2$. Os cálculos foram feitos para valores de ξ neste intervalo, indicando-se na Tabela 3 os resultados obtidos. Para $\xi = 0{,}4$ a concordância com os valores experimentais (primeira coluna da Tabela) é excelente.

Conclui-se que as células têm alturas uniformemente distribuidas no intervalo 0,4-1: o quociente entre a altura mínima e a altura máxima das células é portanto 0,4. Parece também poder concluir-se que não há correlação entre as alturas das células adjacentes numa mesma coluna, nem entre as alturas de células adjacentes em colunas adjacentes, isto é, a altura das células não é correlacionável com o tamanho ou poligonalidade das células de felogénio que as produzem.

TABELA 3

Valores experimentais e calculados de f_i na secção radial

	Valores experimentais	$\xi=1/3$	$\xi=0{,}4$	$\xi=0{,}45$	$\xi=0{,}5$	Poisson
f_4	0,025	0,0500	0,0367	0,0288	0,0222	0,3333
f_5	0,215	0,2166	0,2000	0,1857	0,1704	0,2222
f_6	0,544	0,4697	0,5271	0,5711	0,6148	0,1481
f_7	0,175	0,2126	0,1992	0,1856	0,1704	0,0988
f_8	0,039	0,0490	0,0366	0,0288	0,0222	0,0658
f_9	0,002	0,0020	0,0003	$1{,}9\times10^{-3}$	0	0,0439
f_{10}		0,00003	$1{,}3\times10^{-7}$	$1{,}3\times10^{-9}$	0	0,0293

6 - CONCLUSÕES

A cortiça é formada por células (geometricamente) prismáticas, empilhadas em colunas paralelas à direcção radial Cada célula deve ser encarada, do ponto de vista topológico, como um poliedro com faces, arestas e vértices. O número médio de faces de cada poliedro (igual ao número médio de células adjacentes a uma dada célula) é $\simeq 14$. Em cada aresta há três faces e em cada vértice há quatro arestas. A estrutura tridimensional é tetravalente (quatro arestas em cada vértice). Nas secções da cortiça, as células são poligonais com um número médio de lados igual a 6, e com três arestas em cada vértice (redes trivalentes). Embora todas as secções tenham esta topologia, elas são, do ponto de vista geométrico, diferentes umas das outras. Na secção tangencial (perpendicular à direcção radial) a estrutura é semelhante a um favo-de-mel, embora menos regular. Nas secções contendo a direcção radial (secções radiais), as células têm uma forma (geométrica) rectangular, e a estrutura lembra um ladrilho. Em qualquer dos casos, o número de lados das células (cujo valor médio é igual a 6) é variável de célula para célula, mas as fracções f_i de células com i lados são características de cada secção, variando pouco de amostra para amostra. Esta constância tem certamente a ver com a existência de "regras rígidas" relacionadas com o modo como são geradas as células na cortiça.

A distribuição f_i em secções tangenciais pode ser identificada com a distribuição f_i das células de felogénio que as originam. Por sua vez, estas formam-se por divisão celular segundo planos radiais, sendo possível estabelecer um modelo de divisão que conduz à distribuição f_i experimentalmente observada. Este modelo caracteriza-se por divisões que originam células-filhas com áreas semelhantes (diferindo no máximo de um factor 3) e por ausência de divisão em células com menos de 7 lados. A probabilidade de divisão celular é , àparte esta última restrição, proporcional à área das células.

Por outro lado, a distribuição f_i em secções contendo a direcção radial pode ser explicada admitindo que as células de cortiça produzidas pelo felogénio têm uma distribuição uniforme de alturas no intervalo 0,4h-h, em que h é a altura máxima das células. As células são produzidas com alturas ao acaso dentro deste intervalo, sem correlação entre as alturas de duas células produzidas em sucessão ou entre as alturas de células adjacentes em diferentes colunas.

Em conclusão, a distribuição aparentemente desordenada das células nas secções da cortiça (diferentes tamanhos, diferentes números de lados, paredes (arestas) curvas) esconde as leis de formação

das células, as quais podem ser deduzidas por uma análise cuidada e são, do ponto de vista estatístico, leis relativamente simples. Particularmente importante é a possibilidade de modelizar a divisão celular não-diferenciada, deduzindo leis probabilísticas relacionadas com a topologia das células.

Fica infelizmente sem resposta, no âmbito desta análise, a seguinte questão fundamental: porque é que as células com mais lados são as mais adultas, no sentido de mais reprodutivas; porque é que estas se tornam instáveis e criam uma parede celular que as divide em duas, ao mesmo tempo que o núcleo sofre mitose para dar os núcleos das duas células-filhas. Em suma, quais são as "forças" responsáveis pela divisão celular?

APÊNDICE

Distribuição de poligonalidades em secções radiais

Consideremos uma recta dividida em segmentos, com uma distribuição de comprimentos, x, definida por $p(x)$, tal que $p(x)dx$ é a probabilidade de um segmento ter comprimento entre x e $x+dx$ (Fig. 9a). Não há qualquer correlação entre os comprimentos de segmentos adjacentes. Os comprimentos podem variar no intervalo (ξ, 1). O caso em que o intervalo permitido é infinito, como acontece com uma distribuição de Poisson de pontos sobre uma recta, pode ser tratado da mesma maneira e será abordado no fim deste Apêndice. Os pontos-extremidade dos segmentos serão designados por pontos-E. Tem-se:

$$\int_{\xi}^{1} p(x)dx = 1 \quad ; \quad \bar{l} = \int_{\xi}^{1} xp(x)dx \qquad (9)$$

em que $\bar{l}$ é o comprimento médio dos segmentos.

Determinemos em primeiro lugar a probabilidade $\pi_n(L)dL$ de que a soma dos comprimentos de n segmentos ($n \geq 1$) esteja no intervalo $L, L+dL$. Consideraremos apenas

$$\xi \leq L \leq 1 \qquad (10)$$

Obviamente

$$\pi_1(L) = p(L) \qquad (11)$$

Para $n=2$ (dois segmentos), um deles tem comprimento x e o outro L-x, com qualque x no intervalo ξ, L-ξ. Tem-se

$$\pi_2(L) = \int_{\xi}^{L-\xi} p(x)\,p(L-x)dx \qquad 2\xi \leq L \leq 1$$

$$(12)$$

$$\pi_2(L) = 0 \qquad L < 2\xi$$

Usando o mesmo raciocínio é possível obter a seguinte fórmula de recorrência

$$\pi_{n+1}(L) = \int_{\xi}^{L-n\xi} p(x)\pi_n(L-x)dx \qquad (n+1)\xi \leq L \leq 1$$

$$(13)$$

$$\pi_{n+1}(L) = 0 \qquad L < (n+1)\xi$$

A probabilidade de que a soma dos comprimentos de n segmentos seja inferior a $L(L \leq 1)$, que designaremos por $p_n(L)$, é:

$$p_n(L) = \int_{n\xi}^{L} \pi_n(x)dx \qquad n\xi \leq L \leq 1$$

$$(14)$$

$$p_n(L) = 0 \qquad L < n\xi$$

sendo

$$p_o(L) = 1$$

Consideremos agora um segmento de comprimento L, e determinemos a probabilidade $P(n,L)$ de que existam, em L, exactamente n pontos-E. Admitiremos, como atrás, que $\xi \leq L \leq 1$. A extremidade esquerda do segmento L pode encontrar-se num segmento de comprimento l, $l+dl$, com probabilidade proporcional a $lp(l)dl$. A probabilidade é pois $(l/\bar{l})p(l)dl$.

Para que haja 0 pontos em L é preciso que a extremidade esquerda de L esteja num segmento $l>L$, numa região de comprimento l-L (de modo a

que a extremidade direita se situe também dentro de l), ao que corresponde a probabilidade $(l-L)/l$. Obtém-se então

$$P(0,L)=\int_L^1 (l-L)\frac{p(l)}{\bar{l}}\,dl \qquad (15)$$

Para calcular a probabilidade $P(n,L)$ com $n>0$, definamos o comprimento de excesso L^*, que é o comprimento do segmento L que ultrapassa a extremidade do segmento l onde L tem a sua extremidade esquerda (Fig. 9c):

$$L^*=L+y-l \qquad (16)$$

onde y designa a distância entre as extremidades esquerdas de L e l. Para que L contenha exactamente n pontos ($n>0$) é necessário que $L>(n-1)\xi$ e que L^* exceda a soma dos $(n-1)$ segmentos que se seguem a l, mas não exceda a soma dos n segmentos que se seguem a l. De modo que

$$P(n,L)=\int_l\int_y \frac{p(l)}{\bar{l}}\,dl\left[p_{n-1}(L+y-l)-p_n(L+y-l)\right]dy \qquad (17)$$

Se $l\geq L$ os limites de y são l-L e l; se $l\leq L$ esses limites são $0,l$. Por outro lado $p_k(L^*)$ anula-se se $L^*\leq k\xi$. Pode concluir-se que os intervalos que contribuem para o integral da eq. 17 são os que estão indicados na Tabela 4; estes intervalos dependem do valor de L, sendo necessário considerar três intervalos de L.

TABELA 4

Limites de integração em l e y na eq. 17

Intervalo de l	Intervalo de y					
	$l\geq L\geq(n+1)\xi$		$(n+1)\xi\geq L\geq n\xi$		$n\xi\geq L\geq(n+1)\xi$	
	$p_n\neq0$	$p_{n-1}\neq0$	$p_n\neq0$	$p_{n-1}\neq0$	$p_n\neq0$	$p_{n-1}\neq0$
$\xi;L-n\xi$	0;l	0;l	a;l	0;l	*	—
$L-n\xi;L-(n-1)\xi$	a;l	0;l	a;l	0;l	—	—
$L-(n-1)\xi;L$	a;l	b;l	a;l	b;l	—	—
$L;1$	a;l	b;l	a;l	b;l	b;l	—

a = l-L+$n\xi$
b = l-L+$(n-1)\xi$

*Significa que não há nenhum intervalo

É agora possível efectuar os cálculos conducentes a $P(n,L)$ para uma qualquer distribuição $p(x)$ dos comprimentos dos segmentos. Para uma distribuição uniforme dos comprimentos no intervalo $\xi,1$ (cf.eq.6):

$$p(x)=\frac{1}{1-\xi} \qquad \xi\leq x\leq 1$$

$$p(x)=0 \qquad x<\xi\ ;\ x>1 \qquad (18)$$

obtém-se:

$$\pi_n(L)=\left(\frac{(L-n\xi)^{n-1}}{(n-1)!(1-\xi)^n}\right. \qquad (19)$$

$$p_n(L)=\frac{(L-n\xi)^n}{n!(1-\xi)^n} \qquad n\xi\leq L\leq 1 \qquad (20)$$

sendo nulos os valores fora do intervalo de L indicado. A eq. 20 é válida para qualquer n. Utilizando estas expressões e a Tabela 4 é possível calcular $P(n,L)$. Para $P(0,L)$ obtém-se da eq.15:

$$P(0,L)=\frac{2}{1-\xi^2}\frac{(1-L)^2}{2} \qquad (21)$$

Definamos

$$Q_n=\frac{(L-n\xi)^n}{(n+1)!(1-\xi)^{n-1}} \qquad (22)$$

Obtém-se, para $n>1$, a partir da eq. 17:

$$1\geq L\geq(n+1)\xi \quad P(n,L)=\frac{2}{1-\xi^2}(Q_{n-1}-2Q_n+Q_{n+1})$$

$$(n+1)\xi\geq L\geq n\xi \quad P(n,L)=\frac{2}{1-\xi^2}(Q_{n-1}-2Q_n) \qquad (23)$$

$$n\xi\geq L\geq(n-1)\xi \quad P(n,L)=\frac{2}{1-\xi^2}Q_{n-1}$$

O problema da distribuição de poligonalidades em secções radiais pode ser assim enunciado: é dada uma distribuição $p(x)$ de segmentos e duas outras distribuições $p(x)$ não correlacionadas com a primeira (Fig. 9b). Qual é a fracção expectável de segmentos da primeira distribuição que contêm n_1 pontos da segunda distribuição e n_2 pontos da terceira distribuição? Essa fracção, $(n_1 n_2)$, é

$$(n_1 n_2) = \int_{\xi}^{1} p(L)\, P(n_1, L) P(n_2, L)\, dL \qquad (24)$$

donde resulta a eq. 8 do texto.

Para finalizar este Apêndice consideremos uma distribuição de Poisson de pontos sobre uma recta. A distribuição dos comprimentos x dos segmentos $(0 < x < \infty)$ é [6]

$$\bar{x}\, p(x) = e^{-x/\bar{x}} \qquad (25)$$

e a probabilidade de n pontos em $L (L > 0)$ é, para qualquer $n > 0$,

$$P(n, L) = \frac{(L/\bar{x})^n e^{-L/\bar{x}}}{n!} \qquad (26)$$

que é um resultado bem conhecido [6]. A fracção de células com n_1, n_2 pontos adicionais é dada pela eq. 24 com limites de integração $0, \infty$. Obtém-se

$$(n_1 n_2) = \frac{(n_1 + n_2)!}{3^{n_1 + n_2 + 1}\, n_1! n_2!} \qquad (27)$$

A fracção de células com i lados obtém-se somando estas quantidades para todos os valores compatíveis com a eq. 7, com o seguinte resultado:

$$f_i = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-4} \qquad (28)$$

que verifica as identidades (3) do texto. Os valores de f_i obtidos de (28) estão indicados na última coluna da Tabela 4.

REFERÊNCIAS

1 - M.F. ASHBY, "The Mechanical Properties of Cellular Solids", Met. Trans. 14A, 1755 (1983).

2 - J. VIEIRA NATIVIDADE, "Subericultura", Ministério da Economia - Direcção Geral dos Serviços Florestais e Aquícolas, Lisboa, 1950.

3 - L.J. GIBSON, K.E. EASTERLING e M.F. ASHBY, "The Structure and Mechanics of Cork", Proc. R. Soc. Lond. A377, 99 (1981).

4 - HELENA PEREIRA, M. EMÍLIA ROSA e M.A. FORTES, "The Cellular Structure of Cork from QUERCUS SUBER L.", IAWA BULL, 8, 213 (1987).

5 - M. EMÍLIA ROSA e M .A. FORTES, "Temperature Induced Alterations of the Structure and Mechanical Properties of Cork", Materials Sci. Eng., 100, 69 (1988)

6 - PAUL L. MEYER, "Introductory Probability and Statistical Applications", Cap. 8, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachussets, 1965.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Professora Helena Pereira, do Instituto Superior de Agronomia, que fez uma leitura crítica do artigo. Este trabalho foi realizado no âmbito de um contrato de investigação com o Instituto de Ciência e Tecnologia dos Materiais(ICTM).

SOBRE A MODELAÇÃO FÍSICA E MATEMÁTICA NAS LICENCIATURAS E PÓS-GRADUAÇÕES EM ENGENHARIA

L. M. B. C. CAMPOS

"ARTIGO ELABORADO EM HOMENAGEM AO PROFESSOR ANTÓNIO GOUVEIA PORTELA, POR OCASIÃO DO SEU JÚBILO E SEPTUAGÉSIMO ANIVERSÁRIO"

RESUMO

A Modelação pode ser definida como a descrição de um processo tecnológico, partindo dos fenómenos físicos em que se baseia, e usando uma linguagem matemática para o descrever quantitativamente, por forma a poder optimizá-lo. Após introduzir o conceito de modelação (§1), indica-se o papel que desempenha nas várias fases de um processo de desenvolvimento tecnológico (§2), o que permite evidenciar a relação entre as ciencias fundamentais (matemática e física) e a sua aplicação ao estudo de obras de engenharia (§3). A partir desta é feita uma lista de tópicos relevantes (Tabela I) para uma Área Cientifica de Modelação (§4), conduzindo a um elenco de disciplinas (Tabela II), cuja inserção nos planos de estudo vigentes no I.S.T. é delineada (§5). A experiência adquirida, e a actividade em curso, no âmbito de um dos departamentos do I.S.T. (§6), serve de base para algumas conclusões (§7) sobre as possibilidades de desenvolvimento futuro. A actividade de ensino de modelação é testemunhada pela publicação de 2 livros, 1 por entidade nacional e 1 por editora internacional, que estão incluidos (referências 1-2) na bibliografia breve, anexa ao presente artigo.

Original recebido para publicação em 10.12 87

ÍNDICE

§1 - Introdução
§2 - Processo de desenvolvimento tecnológico
§3 - Relação entre fundamentos e aplicações
§4 - Matérias da área científica
§5 - Inserção nos cursos do I.S.T.
§6 - Resultados da actividade docente
§7 - Conclusões

ANEXO A - Lista de tópicos relevantes
" B - Prioridades para cada domínio tecnológico
" C - Breve bibliografia indicativa

§ 1 INTRODUÇAO

A Tecnologia é a aplicação da ciência à realização de tarefas práticas, e como tal, as obras de engenharia são uma extensão, concebida pelo homem, dos processos que ocorrem na natureza. Da definição de tecnologia que se acaba de apresentar, decorre o papel fulcral desempenhado pela modelação, como o elo que permite aplicar os métodos científicos à resolução de problemas de engenharia, por exemplo, para verificar se um processo proposto é praticável, ou optimizar o projecto de um equipamento. A modelação é também essencial para a ciência, como a descrição quantitativa de

fenómenos que ocorrem na natureza; a tecnologia alarga substancialmente o âmbito da modelação, pelo estudo de processos artificiais, concebidos pelo homem, para modificar a natureza ou superar as suas limitações. À medida que o progresso tecnológico se acelera, e a sua ligação com a ciência e a engenharia se aprofunda, a modelação adquire uma importância sempre crescente, como forma de viabilizar a realização de equipamentos sofisticados e concretização de obras complexas. A tecnologia é o simbolo mais saliente do século XX, isto é, o dominio em que a sociedade contemporânea mais progrediu, e melhor se distingue do passado; a modelação, como componente intelectual da tecnologia, é porventura o ramo do conhecimento humano que mais evoluiu no presente século, e melhor caracteriza a cultura contemporânea.

§ 2-PROCESSO DE DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO

Para documentar o papel da modelação matemática e física no progresso tecnológico, indicamos a sua intervenção nas várias fases de uma obra de engenharia: (i) o desenvolvimento de um equipamento visa satisfazer a um conjunto de especificações técnicas, que resultam de um estudo das necessidades do mercado, isto é, de um modelo de utilização dos equipamentos actuais, que permite prever as vantagens de introduzir certos melhoramentos na geração seguinte; (ii) o projecto preliminar baseia-se num modelo global do equipamento, envolvendo parâmetros que afectam a sua configuração, capacidade, complexidade e custos, e devem ser escolhidos de forma a maximizar a eficiência global; (iii) o projecto detalhado envolve modelos mais pormenorizados de cada sub-sistema, usados para garantir que este dá o contributo esperado para o equipamento global, e para estudar problemas de concretização de cada parte; (iv) a construção e experimentação de protótipos é precedida e acompanhada por simulações usando modelos, por forma a detectar e explicar discrepâncias, antes de estas se transformarem em acidentes; (v) a certificação e validação do equipamento consiste de um conjunto de ensaios, que podem ser conduzidos sem risco a ritmo acelerado, desde que o resultado em cada ponto de ensaio coincida com a previsão do modelo dentro de certas tolerâncias; (vi) estando o modelo validado por comparação com a experiência, pode ser usado para simular condições de funcionamento marginais, que seria perigoso concretizar, ou para testar um grande número de configurações, das quais só algumas podem ser concretizadas, por razões de eficiência e custo; (vii) o planeamento da produção obedece a um modelo de aprovisionamento e optimização do processo, e a fabricação automatizada com elevada precisão depende de um modelo detalhado de cada componente; (viii) a operação de um equipamento complexo e sofisticado é em geral acompanhada por um simulador, que serve para treinar os operadores, experimentar condições anormais de funcionamento e antever as vantagens de certos melhoramentos; (ix) a manutenção do equipamento utiliza indicadores de usura, que permitem substituir apenas os componentes gastos, antes de se verificarem avarias, e sem desperdiçar recursos com revisões desnecessárias; (x) o modelo do equipamento pode ser utilizado em caso de avaria, para localizar rapidamente o componente deficiente, evitando que se paralise o equipamento seguindo pistas falsas; (xi) o aprovisionamento de peças de reserva e planeamento do trabalho de manutenção, recorre a modelos de usura, que permitem manter o equipamento em serviço, sem empatar capital em infraestruturas de apoio sobredimensionadas.

§3 - RELAÇÃO ENTRE FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES

A modelação, para ser quantitativa, baseia-se em ciências fundamentais, como a matemática e a física, mas para que seja relevante a uma especialidade de engenharia, deve ser dirigida por um conhecimento aprofundado desta. Assim, os quatro contributos essenciais para a modelação, correspondem a: (i) do ponto de vista matemático, o cálculo exacto, aproximado ou optimizado, em termos de variáveis que descrevem o funcionamento de um certo equipamento; (ii) do ponto de vista físico, a representação realista dos fenómenos ou processos em que se baseia o funcionamento do equipamento, incluindo os efeitos importantes e omitindo tudo o que seja acessório; (iii) a selecção de métodos matemáticos e lista de efeitos físicos a incluir baseiam-se no conhecimento da especialidade, por exemplo, das condições em que o equipamento vai ser utilizado; (iv) a interpretação dos resultados do modelo depende dos objectivos e desempenho que se pretende do equipamento, e decidirá sobre se o modelo é adequado ou não, e quais as modificações que lhe devem ser introduzidas para que represente um equipamento melhor, mais capaz ou mais eficiente. O ponto fulcral da modelação é o relacionamento entre as ciências fundamentais e a especialidade tecnológica. O físico-matemático pode desenvolver modelos de alta qualidade, mas não os aplica a uma obra tecnológica, nem consegue dialogar com os especialistas de um ramo de engenharia se não souber a sua linguagem, e não compreender os problemas práticos que estes

pretendem resolver; o especialista numa área tecnológica pode imaginar soluções aparentemente possíveis para um problema, mas sem um modelo quantitativo não sabe quais as soluções que funcionam, como escolher as melhores e como as optimizar. O progresso tecnológico baseia-se em imaginar soluções novas para problemas práticos e encontrar a concretização quantitativamente mais eficaz. A modelação é a área de interface entre as ciências fundamentais e especialidades tecnológicas, e só pode ser abordada eficazmente por aqueles que estejam dispostos a atravessar a "fronteira', isto é: (i) engenheiros da especialidade que reforcem a sua formação física e matemática até atingir um bom nível científico; (ii) físicos-matemáticos que estejam dispostos a dedicar um esforço substancial ao conhecimento e familiarização com a especialidade tecnológica a que desejam aplicar os seus conhecimentos. O ensino da modelação deverá ser feito por especialistas na área de aplicação, quer a sua carreira tenha começado pela ciência ou pela engenharia; com efeito, só um especialista na área tecnológica consegue motivar os alunos de engenharia, mostrando a relevância dos aspectos físicos e matemáticos para a descrição adequada e quantitativa de um processo ou equipamento. Os alunos de engenharia interrogam-se frequentemente, em especial nos primeiros anos: para que serve esta matemática ou física? O ensino da modelação mostra, pela experiência, que há da parte dos alunos a atitude inversa: nós não sabemos a matemática e física para estudar este processo! Muitas vezes sabem-na, mas não a sabem aplicar; outras vezes, a apresentação de um problema tecnológico importante é uma forma de despertar o interesse do aluno para um ramo da física ou matemática que ainda não conhecem, motivando-os assim para o seu estudo.

§ 4 - MATÉRIAS DA ÁREA CIENTÍFICA

Em cada especialidade tecnológica, é possível fazer uma lista dos temas de matemática e física mais relevantes, que se procura incluir nas respectivas licenciaturas ou partes escolares de cursos de pós-graduação. Uma comparação de tópicos matemáticos e físicos relevantes para várias especialidades tecnológicas revela muitos pontos comuns: as áreas tecnológicas distinguem-se essencialmente pelo domínio de aplicação e linguagem que lhes está associada, mas os fundamentos têm numerosas afinidades. Com efeito, existe uma gama limitada de fenómenos ou efeitos que o engenheiro pode utilizar na concepção de equipamentos, e muitos métodos matemáticos encontram aplicação nos domínios mais diversos da tecnologia. Daqui resulta que é possível fazer uma Lista de Tópicos de matemática e física que cobrem a maioria das necessidades fundamentais das áreas tecnológicas mais importantes na actualidade. Esta lista, que se apresenta no Anexo A, consiste de 36 capítulos, e para cada um destes é indicado um exemplo típico de aplicação tecnológica. Na realidade, a gama de exemplos podia ser muito mais completa, e é apenas para evitar alongar essa lista que se restringiu o número de instanciações. Embora a lista de tópicos seja algo longa, é muito menor que o número de especialidades de engenharia multiplicado pelo número de tópicos que cada uma usa, visto que a maioria de tópicos têm interesse para várias especialidades tecnológicas. De facto, existem problemas análogos em vários domínios da engenharia, em geral aparecendo sob linguagens diferentes e conduzindo a aplicações diversas, que por vezes fazem esquecer que se trata de variantes ou repetições do mesmo problema. Como exemplos de analogias relevantes em várias especialidades tecnológicas damos: (i) os campos electro e magnetoestáticos em electrotecnia, o escoamento potencial em mecânica dos fluidos, a elasticidade plana em resistência dos materiais, a condução de calor estacionária, a difusão da massa estacionária e o campo gravítico clássico em outras especialidades, que são todos descritos por equações de Laplace ou Poisson; (ii) os circuitos eléctricos e mecânicos têm analogias, que se estendem a circuitos hidráulicos e ramificações acústicas, e têm analogias com cadeias de desintegração e reacções químicas; (iii) as ondas electromagnéticas, as vibrações de cordas, barras, placas e corpos tri-dimensionais, as ondas hidráulicas, acústicas e gravíticas constituem outro conjunto de problemas análogos. Embora a lista de tópicos relevantes em anexo cubra a maioria das necessidades das várias especialidades tecnológicas, os exemplos dados servem apenas de indicação de algumas das muitas aplicações importantes.

§ 5 - INSERÇÃO NOS CURSOS DO I.S.T.

A lista de tópicos de modelação relevante para a totalidade das especialidades tecnológicas consiste de 36 capítulos indicados no Anexo A; o grau de desenvolvimento apropriado a cada capítulo corresponde a cerca de 150 páginas de 'folhas' A4 dactilografadas, o que implica que é possível leccionar 4 capítulos numa disciplina semestral de licenciatura, ou numa disciplina mais intensiva de pós-graduação. Portanto, os 36 capítulos de modelação correspondem a 9 disciplinas, e seria pouco viável incluir a sua totalidade nos cursos existentes. É de salientar que, do ponto de vista de um certo domínio tecnológico, certos tópicos são mais importantes ou têm utilização mais frequente que outros, pelo que é razoável dividir as 9 disciplinas em

três grupos de prioridades: (i) as disciplinas obrigatórias, que versam os temas de modelação de uso quase constante, e indispensáveis para a especialidade; (ii) as disciplinas opcionais, que versam temas importantes para uma boa formação do aluno, mas não podem ser incluidas taxativamente no plano de estudos, por razões de espaço ou outras; (iii) as disciplinas omissas, por corresponderem mais a uma formação interdisciplinar do que a uma especialização no domínio tecnológico em causa. A divisão das disciplinas de modelação em fixas, optativas e omissas feita acima, tem em vista os cursos de licenciatura. No caso de uma pós-graduação, por exemplo, a parte escolar de um curso de mestrado, é natural que: (ii) as disciplinas optativas na licenciatura possam passar a obrigatórias no mestrado, se se pretender reforçar a formação dos alunos em tecnologias associadas à especialidade: (iii) as disciplinas omissas na licenciatura seriam incluidas como optativas num mestrado que lhe serve de sequência, se este visasse dar uma formação interdisciplinar. A classificação das disciplinas em obrigatórias, optativas e omissas depende, evidentemente, do domínio tecnológico em causa. A Tabela de Prioridades para cada Domínio Tecnológico, apresentada no Anexo B indica, para cada licenciatura e ramo leccionado no I.S.T., quais as disciplinas de modelação que, na opinião do autor, deveriam ser consideradas obrigatórias e optativas ao nível da licenciatura e mestrado. A tabela reflecte um esforço para reduzir o número de disciplinas obrigatórias, tendo em conta as pressões existentes sobre os elencos de disciplinas; não seria difícil, na maioria dos casos, justificar a passagem de disciplinas optativas a obrigatórias, mas não foi essa a opção seguida: tomou-se a via 'minimalista' de indicar os tópicos de modelação essenciais a cada nível, e apenas esse. A escolha das disciplinas a incluir em cada licenciatura ou mestrado e os seus programas, poderiam e deveriam ser ajustadas de acordo com os docentes da especialidade em causa.

§ 6 - RESULTADOS DA ACTIVIDADE EM CURSO

As duas tabelas anexas podem ser usadas como se segue: (i) do ponto de vista de um certo domínio tecnológico, o Anexo B indica as disciplinas obrigatórias e optativas, e o Anexo A resume os tópicos incluídos em cada uma delas; (ii) do ponto de vista de uma formação completa na área científica de modelação, o Anexo A indica a sequência de disciplinas, e o Anexo B os seus principais domínios de aplicação. O planeamento da modelação nos cursos de licenciatura e mestrado leccionados no I.S.T., é bastante menos 'revolucionário' do que pode parecer à primeira vista: (i) supõe a manutenção das disciplinas do 'tronco comum' de matemática e física, que oferecem uma formação de base preliminar à área de modelação; (ii) não exclui a existência de licenciaturas em matemática e física, às quais a modelação deve dar um contributo importante, visto que é a área priveligiada de relação com a engenharia e tecnologia; (iii) defende que as disciplinas de modelação sejam leccionadas por docentes da especialidade tecnológica em causa para melhor motivar os alunos; (iv) corresponde, em parte, ao que já se pratica no I.S.T., visto que a modelação é de facto ensinada, de forma mais ou menos dispersa, em todas as licenciaturas e mestrados. O aparecimento da modelação como área científica distinta verificou-se no Departamento de Engenharia Mecânica, traduzindo-se nas seguintes disciplinas: (i/ii) a Mecânica Aplicada I e II, respectivamente no 1º e 2º semestres do segundo ano, que correspondem às disciplinas IV e V (do Anexo A); (iii/iv) a Matemática Aplicada e Análise Numérica, no 1º semestre de, respectivamente, o terceiro e quarto anos, que correspondem aproximadamente às disciplinas I e III (do Anexo A); (v/vi) mecânica varicional e complementos de matemática respectivamente do 1º e 2º semestres do quarto ano do ramo de Sistemas, e várias disciplinas de mestrado, que correspondem às disciplinas II e VI (do Anexo A). Em resumo, foi acumulada ao longo dos últimos dez anos, uma experiência de mais de 6000 alunos x disciplina, no leccionamento de modelação a alunos da licenciatura a partir do 2º ano, e de vários mestrados. A experiência adquirida demonstra que: (i) os alunos não põem em dúvida a utilidade dos fundamentos de matemática e física, se a sua exposição for acompanhada de aplicações detalhadas à sua especialidade de engenharia; (ii) o ensino de modelação pode ser escalonado ao longo do curso de licenciatura, dos primeiros até aos últimos anos, permitindo atingir um nível de conhecimentos mais elevado; (iii) o desenvolvimento da modelação em paralelo com as outras áreas científicas da licenciatura, evita que os alunos esqueçam os fundamentos quando chegam às aplicações, e contribui para o bom funcionamento das disciplinas da especialidade.

§ 7 - CONCLUSÕES

Do que foi exposto, em termos da experiência num departamento, ressalta que a área de modelação é 'horizontal', no sentido que se cruza com as restantes áreas 'verticais' da especialização, além disso, a modelação conduz à sua própria

especialidade, com incidência especial nos fenómenos interdisciplinares, de importância crescente na tecnologia moderna, e difíceis de abordar por outra forma numa estrutura de ensino tradicional. O aparecimento de áreas científicas de modelação nas várias licenciaturas e mestrados do I.S.T., no âmbito do plano-quadro exposto no anexo B, teria as seguintes vantagens: (i) ao nível de cada Departamento, encarregado de leccionar um domínio tecnológico, permitiria desenvolver os aspectos de modelação, essenciais na tecnologia moderna, e estabelecer uma relação mais forte com os Departamentos de base (Matemática e Física); (ii) a existência de uma área de modelação nas várias licenciaturas facilitaria o ensino e investigação em domínios interdisciplinares, que são as principais áreas de progresso tecnológico na actualidade, minorando os efeitos de uma divisão demasiado rígida, e algo desactualizada, da engenharia em especialidades estanques; (iii) o facto de haver um elenco de disciplinas comuns a todos os cursos, ajustadas a cada especialidade e leccionadas pelo Departamento respectivo, criaria um padrão de qualidade de ensino uniforme no I.S.T., sem contrariar a autonomia dos Departamentos. A modelação poderia ser integrada nos vários cursos do I.S.T., tomando como ponto de partida a adaptação de um conjunto de livros que, apesar de terem sido utilizados até agora apenas em engenharia mecânica, foram escritos numa concepção interdisciplinar, aplicável às outras especialidades de engenharia. De entre esses textos, estão completos e em vias de publicação dois livros, a "Análise aplicada e campos de força", patrocinado e em fase de impressão pela Fundação Calouste Gulbenkian, e "Complex functions and potential theory", aceite para publicação pela World Scientific, que se incluem na bibliografia breve, constante do Anexo C.

ANEXO A

LISTA DE TÓPICOS DE MODELAÇÃO
(I - IX, 1 - 36)

Consideram-se a álgebra, análise e física geral como conhecimentos de base, e indicam-se 36 capítulos, organizados em 9 disciplinas, com um exemplo de aplicação para cada.

I - CAMPOS POTÊNCIAIS

1 - Domínio complexo: O uso de complexos no estudo da estabilidade dinâmica de sistemas mecânicos e circuitos eléctricos;
2 - Derivação e integração: uso de funções holomorfas para analisar e sintetizar escoamentos potenciais, campos electroestáticos, etc..
3 - Séries de potências: decomposição de campos potenciais em multipolos e o uso de singularidades no método das imagens;
4 - Transformação conforme: escoamento potencial em torno de perfis de asa, através de fendas, à saída de canais e em jactos livres;

II-FENÓMENOS DE TRANSFERÊNCIA

5 - Funções transcendentes: cálculo do campo electroestático de condensadores de placas em várias posições relativas;
6 - Funções generalizadas: funções de influência ou de Green para cordas, barras e campos escalares ou vectoriais;
7 - Equações diferenciais ordinárias: oscilações livres ou forçadas, com ou sem dissipação, lineares ou não, de sistemas mecânicos e circuitos eléctricos com vários graus de liberdade;
8 - Equações às derivadas parciais: fenómenos de propagação e difusão em linhas electromagnéticas, canais hidráulicos, barras elásticas, tubos acústicos, etc.

III - ANÁLISE ESPECTRAL

9 - Séries de Fourier: análise de vibrações de motores, estatística de processos discretos;
10 - Integral de Fourier: fenómenos de difusão não estacionária de calor, massa ou carga eléctrica, estatística de variáveis aleatórias contínuas;
11 - transformada de Laplace: estudo da resposta de sistemas de controlo de entrada-saída com realimentação e acoplamentos vários;
12 - Métodos aproximados: cálculo aproximado de frequências próprias de vibração, modos de instabilidade elástica, etc. por via analítica ou numérica.

IV-MECÂNICADOS CORPOS RÍGIDOS

13 - Álgebra de multiplicidades: equilíbrio estático de forças, momentos e tensões em estruturas recticuladas e contínuas;
14 - Transformações de coordenadas: vários grupos de transformação de coordenadas e sistemas de coordenadas ortogonais adaptados às formas mais importantes;
15 - Corpos e colisões: geometria de massas e momentos de inércia de corpos, e colisões envolvendo translação e rotação;
16 - Lei de transformação tensorial: classificação de tensores e aplicação ao estudo de trajectórias e movimentos giroscópicos;

V - FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

17 - Métrica e derivação: aceleração em trajectórias curvilíneas e deformação de corpos de formas não planas;
18 - Curvas e superfícies: movimento ao longo de curvas e rolamento com escorregamento sobre superfícies;
19 - Gradiente, divergência e rotacional: operadores na forma tensorial generalizada, e o seu uso em elasticidade com fenómenos térmicos e electromagnéticos;
20 - Operadores de transporte: leis de conservação de massa, momento e energia em fluidos dissipativos (viscosos, com condução de calor e difusão de massa);

VI - MÉTODOS VARIACIONAIS

21 - Extremos e variações: equações de Euler-Lagrange para sistemas com N variáveis escalares, vectoriais ou tensoriais, dependentes do espaço e tempo, e derivadas até qualquer ordem, e com constrangimentos;
22 - Espaço de fases: formulação Hamiltoneana da mecânica clássica e dos meios contínuos;
23 - Geodésicas e curvatura: optimização de trajectórias num campo gravítico clássico-relativista;

24 - Dimensões e unidades: relações de similitude e dimensionais na análise de observações e estabelecimento de leis experimentais;

VII - VIBRAÇÕES E OSCILAÇÕES

25 - Funções auxiliares: funções gama, beta e zeta, integrais de Fresnel e fenómenos de difracção;
26 - Equações diferenciais singulares: funções de Bessel e oscilações com simetria cilíndrica singular;
27 - Representações integrais: funções de Legendre associadas e problemas com simetria esférica;
28 - Operadores de diferintegração: funções hipergeométricas e partículas em poços de potencial quânticos;

VIII - ACÚSTICA E ONDAS

29 - Sistemas de funções ortogonais: polinómios de Hermite e transmissão através de meios determinísticos e aleatórios;
30 - Transformadas integrais: transformadas de Hankel ou Hilbert, e resolução de problemas com fontes;
31 - Problemas de ordem elevada: vibrações acopladas e ondas em meios não-homogéneos e em movimento com absorção e reflexão;
32 - Equações diferenciais periódicas: ressonância simples e paramétrica em sistemas com coeficientes periódicos;

IX-PROCESSOS INTERACTIVOS

33 - Funções elípticas: solução de problemas não-lineares relacionados com giroscópios e trajectórias em campos de força;
34 - Fenómenos não-lineares: estudo de vibrações de grande amplitude e formação e decaimento de ondas de choque;
35 - Instabilidade e bifurcações: determinação de regiões de estabilidade e transições entre estados;
36 - Equações integrais: fenómenos de acoplamento sólido-fluido através de interfaces, estatísticas de processos de colisão.

ANEXO B

PRIORIDADES EM CADA DOMÍNIO TECNOLÓGICO (8 Licenciaturas)
disciplina indicada na Tabela A

Domínio Científico	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
LICENCIATURA Ramo	campos potenciais	fenómenos transferência	análise espectral	corpos rígidos	meios contínuos	métodos variacionais	vibrações oscilações	ondas e acústica	processos interactivos
CÍVIL	x	x	x	*	*	*	-	-	-
ELECTRO-TÉCNICA									
Energia	*	x	*	*	x	x	-	-	-
Sistemas	*	*	*	-	-	-	x	x	x
Telecomunicações	*	x	*	-	-	-	*	x	x
FÍSICA TECNOLÓGICA	*	*	*	*	*	*	x	x	x
MATEMÁTICA APLICADA	*	*	*	x	x	x	*	*	*
METALÚRGIA E MATERIAIS	-	-	-	*	*	*	X	X	X
MECÂNICA									
Produção	-	-	x	*	*	*	x	-	-
Sistemas	*	*	*	*	*	*	*	x	-
Termodinâmica	*	*	x	*	*	x	x	-	-
MINAS									
Geologia	-	-	-	*	*	*	-	-	-
Planeamento	*	*	*	x	x	x	-	-	-
QUIMICA									
Biotecnologia	x	x	-	x	*	x	-	-	-
Processos	x	x	-	x	*	-	*	-	-
Tecnologia	*	*	-	x	*	-	-	-	-

* disciplina obrigatória no curso de licenciatura;

x disciplina optativa no curso de licenciatura, e obrigatória no curso de pós graduação;

- disciplina facultativa no curso de licenciatura, e optativa no curso de pós-graduação;

A tabela seguinte poderia ser revista, tendo em conta os pareceres de docentes de cada domínio tecnológico.

ANEXO C

BREVE BIBLIOGRAFIA INDICATIVA

***Livros resultantes do ensino no I.S.T.:**

1 - L.M.B.C. CAMPOS, Análise aplicada e campos de força, Fundação Calouste Gulbenkian, 1988.

2 - L.M.B.C. CAMPOS, Complex functions and potential theory, World Scientific, 1989.

***Teoria das funções e campos potenciais:**

3 - F.G. TEIXEIRA, Curso de Análise Infinitesimal, Tipografia Ocidental, 1891-3 (2 vols).

4 - E. GOURSAT, Course d'Annalyse, Gauthier-Villars, 1900-4 (Dover, 6 vols).

5 - E.T. WHITTAKER & G.N. WATSON, Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, 1902, 6th ed. 1927.

6 - C. CARATHEODORY, Theory of Functions, Verlag Birkhauser 1935 (Chelsea Publications, 2 vols, 1972).

7 - O.D. KELLOG, Foundations of Potential Theory; Springer 1929, (Dover 1953).

8 - M. LAURENTIEV & B. CHABAT, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Ed. Mir, 1977.

***Transformadas integrais e fenómenos de transferência:**

9 - H.S. CARSLAW, Introduction to the theory of Fourier series and integrals, MacMillan 1930, (Dover 1950).

10 - N. WIENER, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933, (Dover 1958).

11 - L. SCHWARTZ, Les distributions, Hermann 1949.

12 - M.J. LIGHTHILL, Fourier analysis and generalized functions, Cambridge U.P., 1958.

13 - R.V. CHURCHILL, Operational mathematics, McGraw-Hill 1958.

14 - I.N. SNEDDON, The use of integral transforms, McGraw-Hill 1974.

***Geometria tensorial e mecânica clássica:**

15 - P. APELL, Traité de Mécanique, Gauthier-Villars 1900-4 (5 vols).

16 - E.J. ROUTH, Dynamics of rigid bodies, Cambridge Univ. Press 1908-10 (Dover 1955).

17 - T. LEVI-CIVITA, Absolute differential calculus, Blackie 1926, (Dover 1977).

18 - L. BRILLOUIN, Les tenseurs en mécanique et elasticité, Masson 1936.

19 - J.A. SCHOUTEN, Tensor analysis for physicists, Oxford Univ. Press 1956.

20 - H. CABANNES, Mécanique, Dunod, 1972.

*** Cálculo variacional e mecânica dos meios contínuos:**

21 - H. LAMB, Hidrodynamics, Cambridge Univ. Press 1889, 6th ed. 1932.

22 - O. BOLZA, Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press 1904, (Dover 1961).

23 - A.E.H. LOVE, Theory of elasticity, Cambridge Univ. Press 1927, (Dover 1944).

24 - C. LANCZOS, The variational principles of mechanics, Toronto Univ. Press 1950.

25 - I.S. SOKOLNIKOFF, Theory of elasticity, McGraw-Hill, 1972

26 - G.K. BATCHELOR, Fluid Mechanics, Cambridge Univ. Press 1967.

*** Equações diferenciais e fenómenos interactivos:**

27 - A.R. FORSYTH, Treatise of differential equations, MacMillan 1885.

28 - H. BATEMAN, Partial differential equations, Cambridge Univ. Press 1932.

29 - H.S. CARSLAW & J.C. JAEGER, Conduction of heat in solids, Oxford Univ. Press 1939.

30 - W.G. CADY, Piezoelectricity, McGraw-Hill 1946, (Dover 1964).

31 - S. CHANDRASEKHAR, Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford U.P. 1961.

32 - L.I. SEDOV, Mécanique des millieux continus, Ed. Mir 1975 (2 vols).

*** Vibrações e ondas:**

33 - J.W.S. RAYLEIGH, Theory of sound, MacMillan 1894, Dover 1945 (2 vols).

34 - J.A. STRATTON, Electromagnetic theory, McGraw-Hill 1944.

35 - A. SILVEIRA, Teoria da Elasticidade, IST 1954, INIC 1986 (2 vols).

36 - M. BORN & E. WOLF, Principles of optics, Pergamon Press 1959.

37 - M.J. LIGHTHILL, Waves in fluids, Cambridge Univ. Press 1978.

38 - A.D. PIERCE, Acoustics, McGraw-Hill 1981.

*** Livros de referência e cursos gerais:**

39 - A. SOMMERFELD, Lectures on theoretical physics, Academic Press 1942-9 (6 vols).

40 - H.S. JEFFREYS & B.S. JEFFREYS, Methods of mathematical physics, Cambridge Univ. Press 1944, 3rd ed. 1956

41 - L.D. LANDAU & E.F. LIFSHITZ, Cours de Physique Téorique, Ed. Mir 1949-67 (9 vols).

42 - R. COURANT & D. HILBERT, Méthods of mathematical physics, Academic Press 1953 (2 vols).

43 - P.M. MORSE & H. FESHBACH, Methods of theorical physics, McGraw-Hill 1953 (2 vols).

44 - V.I. SMIRNOV, Cours de mathématiques supérieures, Ed. Mir 1969-1985 (6 vols).

Matrix Formulation for Electromagnetic Wave Propagation in Multilayered Bianisotropic Media

C. Paiva
A. M. Barbosa

Secção de Propagação e Radiação, DEEC, IST
e
Centro de Análise e Processamento de Sinais

ABSTRACT

A matrix formalism for electromagnetic wave propagation in multilayered bianisotropic media, intended for application either in transmission and reflection of plane waves or in guided wave propagation, is presented.

Two specific problems are considered: the transmission and reflection of a plane wave when propagating across a multilayered bianisotropic medium and the derivation of the modal equation for an open multilayered bianisotropic waveguide. For the first problem, the particular case of an air-magnetoplasma interface is studied as an example of application of the developed matrix formalism for non-guided wave propagation.

RESUMO

Desenvolve-se um formalismo matricial para meios bianisotrópicos estratificados, para aplicação quer a problemas de transmissão e reflexão de ondas, que a problemas de propagação guiada.

Consideram-se dois problemas concretos: a reflexão e transmissão de uma onda plana através de um meio estratificado bianisotrópico e o estabelecimento da equação modal para um guia aberto bianisotrópico estratificado. Relativamente ao primeiro problema o caso particular de uma interface ar-magnetoplasma é estudado como exemplo de aplicação do formalismo matricial desenvolvido para propagação não.guiada.

ORIGINAL RECEBIDO PARA PUBLICAÇÃO EM 17.02.1988

1 - INTRODUCTION

Layered anisotropic media have been a subject of increasing interest in the last few years due to its application either in applied optics or in guided wave propagation including millimeter-wave and optical integrated circuits.

The most general approaches to multilayered anisotropic media appear to be the 4x4 matrix techniques. These techniques have been first introduced by Teitler and Henvis [1] and resumed by Berreman [2] and Yeh [3]. More recent studies using the same basic formulation include the works of Schwelb [4], who adopted a transverse resonance approach based on impedance matrices for guided wave structures, and Krowne [5], whose analysis in the Fourier transformed domain is particularly suited for multilayered structures such as transmission lines and printed antennas. Berreman's and Yeh's formalisms have been compared by Lin-

Chung and Teitler [6] who developed a unified framework for ellipsometric studies. Applications of the 4×4 matrix techniques to ellipsometric and diffraction analyses concerning anisotropic media have been also recently presented [7, 8]. Bianisotropic media have been considered in References 2 and 5.

In this paper, a general matrix formalism applicable to electromagnetic wave propagation in bianisotropic media is also developed.

In Section 2 the basic matrix field equations are derived. The mathematical treatment is formally similar to other published analyses, namely to Berreman's and Krowne's quoted works. However, in Berreman's approach, only non-guided wave propagation was considered as the focus of interest was optics, restricting the directions of incident waves to a plane perpendicular to the layered medium. On the other hand, Krowne's analysis is devoted only to open and closed guided wave structures. The mathematical treatment developed in Section 2 is more general, in the sense that either non-guided wave propagation or guided wave structures may be considered. For this purpose, all three rectangular components of wave vectors are considered, in spite of the homogeneity of the structure in the horizontal plane (Fig. 1). Hence, for ellipsometric analyses any direction of incidence may be considered and for guided wave propagation along the z-direction one only has to make $k_y=0$ in all equations derived in Section 2 (see Fig. 1). The analysis presented in Section 2 includes general expressions for the electromagnetic fields, based on the eigenvalue-problem for the derived 4x4 coupling matrix which results, for each layer, from the application of Maxwell's equations.

In Section 3 the problem of reflection and transmission of plane waves at an air-magnetoplasma interface is solved. This is a simple example, which has the merit of illustrating the application of the general theory developed in the previous Section and providing a comparison with available results [9].

In Section 4 a generalization of the problem studied in Section 3 is carried on by means of the definition of a transfer matrix for the multilayered medium.

Finally, in Section 5, the theory presented in Section 2 is applied to the derivation of the modal equation for open bianisotropic multilayered waveguides. Although this modal equation is quite general, particular attention is paid to lossless crystals at optical frequencies, namely to the particular form of its coupling matrix. One should note, however, that - as far as the authors are aware - this constitutes a new approach to bianisotropic layered waveguides.

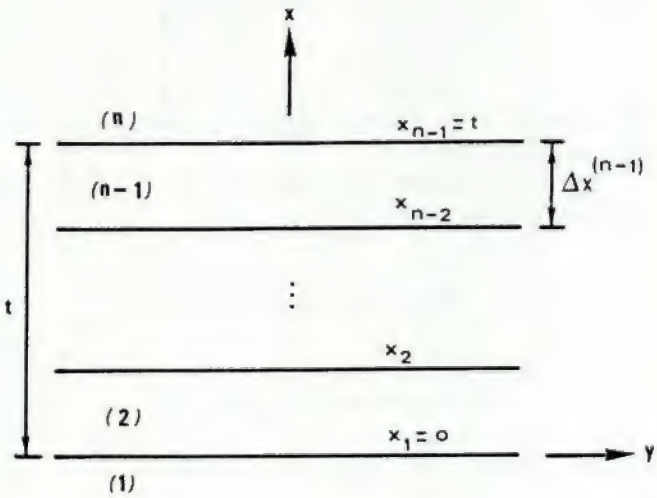


Fig. 1 - Layered medium with n - 2 interior layers of total thickness t.

2 - BASIC MATRIX FIELD EQUATIONS

The stratified medium under consideration may have an arbitrary number of anisotropic layers as depicted in Fig. 1.

Electromagnetic fields are assumed to have $\exp[j(\omega t-k_y y-k_z z)]$ dependence. Since the whole layered medium is homogeneous in the yz plane, k_y and k_z remain the same throughout all strata.

Wave vectors **k** have the general form

$$\mathbf{k}=h\hat{\mathbf{x}}+k_y\hat{\mathbf{y}}+k_z\hat{\mathbf{z}} \qquad (1)$$

For ellipsometric problems, given k_y and k_z one has to calculate the x-components $h_\sigma^{(s)}$ for the sth-layer with $1\leq s\leq n$ and where n is the total number of layers. The σ-subscripts account for all possible values of $h^{(s)}$ in each layer. For guided wave propagation along the z-direction, one has $k_y=0$ due to the uniformity of the structure along the y-direction and one has to calculate k_z and all the transverse wave numbers $h_\sigma^{(s)}$.

The complex Maxwell's equations in frequency domain

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E}&=-j\omega\mathbf{B}\\ \nabla\times\mathbf{H}&=j\omega\mathbf{D}\end{aligned} \qquad (2)$$

may be written in matrix form for the (x,y,z) frame of Fig. 1 as

$$\nabla\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.\mathbf{e}=j\omega\mathbf{f} \qquad (3)$$

where **e** and **f** field vectors are defined as

$$\mathbf{e}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{4}$$

and where **0** and **1** are, respectively, the 3×3 null and unit matrices.

For the sth-layer, the constitutive relations in frequency domain are

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}(\omega).\mathbf{E}+\boldsymbol{\xi}^{(s)}(\omega).\mathbf{H}$$

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{\zeta}^{(s)}(\omega).\mathbf{E}+\mu_0\boldsymbol{\mu}^{(s)}(\omega).\mathbf{H} \tag{5}$$

where [9, p.68][(i)] for each tensor $\boldsymbol{\alpha}$ in (5)

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega)=\int_0^\infty \boldsymbol{\alpha}(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6}$$

In Eqs. (5) the labelled tensors are independent of the space-coordinates for each layer, i.e. each layer is homogeneous. The $\boldsymbol{\xi}$ and $\boldsymbol{\zeta}$ tensors are called magnetoelectric tensors [9, p.62] and are nonzero in optically active media [2, 5]. A medium characterized by Eqs. (5) is said to be bianisotropic [10, p.7].

If one defines a 6×6 matrix for the (x,y,z) frame of Fig. 1 as

$$\mathbf{M}^{(s)}=\begin{bmatrix}\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} & \boldsymbol{\xi}^{(s)}\\ \boldsymbol{\zeta}^{(s)} & \mu_0\boldsymbol{\mu}^{(s)}\end{bmatrix} \tag{7}$$

the constitutive relations in Eqs. (5) may be condensed in the form

$$\mathbf{f}=\mathbf{M}^{(s)}.\mathbf{e} \tag{8}$$

Defining a 3×3 matrix operator

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}0 & jk_z & -jk_y\\ -jk_z & 0 & -\dfrac{d}{dx}\\ jk_y & \dfrac{d}{dx} & 0\end{bmatrix} \tag{9}$$

(i) Henceforward, superscripts (s) are dropped away to simplify the notation where there is no risk of confusion.

Eq. (3) may be written in compact form as

$$\mathbf{R}.\mathbf{e}=j\omega\mathbf{f} \tag{10}$$

where

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{R}_1\\ -\mathbf{R}_1 & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{11}$$

is a 6×6 matrix operator.

Using Eqs. (8) and (10), one may write

$$\mathbf{R}.\mathbf{e}=j\omega\mathbf{M}^{(s)}.\mathbf{e}. \tag{12}$$

Eq. (12) shows that e_1 and e_4 components of **e** (i. e., E_x and H_x) can be algebraically expanded in terms of the other field components using rows 1 and 4

$$jk_ze_5-jk_ye_6=j\omega\sum_{i=1}^{6}M_{1i}e_i$$

$$-jk_ze_2+jk_ye_3=j\omega\sum_{i=1}^{6}M_{4i}e_i. \tag{13}$$

Rows 2,3,5, and 6 of Eq. (12) lead to the following first-order linear differential equations

$$-jk_ze_4-\frac{de_6}{dx}=j\omega\sum_{i=1}^{6}M_{2i}e_i$$

$$jk_ye_4+\frac{de_5}{dx}=j\omega\sum_{i=1}^{6}M_{3i}e_i$$

$$jk_ze_1+\frac{de_3}{dx}=j\omega\sum_{i=1}^{6}M_{5i}e_i \tag{14}$$

$$-jk_ye_1-\frac{de_2}{dx}=j\omega\sum_{i=1}^{6}M_{6i}e_i.$$

Eqs. (13) and (14) are similar to Eqs. (15) and (21) of Reference 5.

In order to handle more easily the boundary conditions of the layered medium one introduces the field vectors

$$\boldsymbol{\phi} = \left[e_1, e_4 \right]^T$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \left[e_2, e_6, e_3, e_5 \right]^T \tag{15}$$

where the symbol "T" stands for transpose. In Eqs. (15) $\boldsymbol{\phi}$ includes the normal-to-the-interfaces field components whereas $\boldsymbol{\Psi}$ includes the tangential-to-the-interfaces field components. The special arrangement chosen for the $\boldsymbol{\Psi}$ field vector will be understood later.

Eqs. (13) can now be written in terms of $\boldsymbol{\phi}$ and $\boldsymbol{\Psi}$:

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{G}^{(s)} . \boldsymbol{\Psi}(x) \tag{16}$$

where $\mathbf{G}$ is a 2×4 matrix whose elements are ($1 \leq i \leq 4$):

$$G_{1i} = \frac{1}{\Delta} \left[M_{14}(M_{4p} + A_{1i}) - M_{44}(M_{1p} + A_{2i}) \right]$$

$$G_{2i} = \frac{1}{\Delta} \left[M_{41}(M_{1p} + A_{2i}) - M_{11}(M_{4p} + A_{1i}) \right] \tag{17}$$

where

$$\Delta = M_{11} M_{44} - M_{14} M_{41} \tag{18}$$

and A_{ij} are the elements of a 2×4 matrix given by

$$A = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} k_z & 0 & -k_y & 0 \\ 0 & k_y & 0 & -k_z \end{bmatrix} \tag{19}$$

In Eqs. (17) p subscripts are related to i subscripts according to Table I.

Using Eq. (16) to eliminate e_1 and e_4 from Eqs. (14), one obtains

Table I

i	1	2	3	4
p	2	6	3	5

$$\frac{d}{dx} \boldsymbol{\Psi}(x) = -j \mathbf{C}^{(s)} . \boldsymbol{\Psi}(x) \tag{20}$$

where $\mathbf{C}$ is a 4×4 coupling matrix whose elements are

$$C_{1i} = \omega \left[M_{6p} + M_{64} G_{2i} + \left(M_{61} + \frac{k_y}{\omega} \right) G_{1i} \right]$$

$$C_{2i} = \omega \left[M_{2p} + M_{21} G_{1i} + \left(M_{24} + \frac{k_z}{\omega} \right) G_{2i} \right]$$

$$C_{3i} = -\omega \left[M_{5p} + M_{54} G_{2i} + \left(M_{51} - \frac{k_z}{\omega} \right) G_{1i} \right] \tag{21}$$

$$C_{4i} = -\omega \left[M_{3p} + M_{31} G_{1i} + \left(M_{34} - \frac{k_y}{\omega} \right) G_{2i} \right]$$

with $1 \leq i \leq 4$; p subscripts are related to i subscripts according to Table I.

The matrix equation (20) constitutes a linear homogeneous differential system with constant coefficients for the sth-layer. The expression for $\boldsymbol{\Psi}^{(s)}(x)$ can be found by means of the corresponding eigenvalue-problem related to the $C^{(s)}$ coupling matrix.

The eigenvalues of the coupling matrix for the sth-layer constitute all the possible x-wavenumbers $h_0^{(s)}$. These eigenvalues are determined by solving the characteristic equation [11, p.200]

$$det \left[h^{(s)} 1 - \mathbf{C}^{(s)} \right] = 0 \tag{22}$$

When expanded, this equation reduces to a Booker quartic equation [9, p.200][ii]

$$h^4 - \beta_1 h^3 + \beta_2 h^2 - \beta_3 h + \beta_4 = 0 \tag{23}$$

with four roots h_σ, i. e. $1 \leq \sigma \leq 4$. Hence, the diagonalization of $\mathbf{C}^{(s)}$ is possible if it has four linearly independent eigenvectors [11, p.735] $\mathbf{u}_\sigma^{(s)}$ which may be found according to the equation [11, p.200]

$$\left[h_\sigma^{(s)} \mathbf{1} - \mathbf{C}^{(s)} \right] . \mathbf{u}_\sigma^{(s)} = 0 \tag{24}$$

Except for the limit case of an isotropic layer there are always four distinct eigenvalues $h_\sigma^{(s)}$, thus making possible the diagonalization of $\mathbf{C}^{(s)}$ [11, p.719]. However, even in the isotropic case, where each eigenvalue has a degree of multiplicity two, it is possible to choose two linearly independent eigenvectors for each degenerate eigenvalue, thus making always possible the diagonalization of the coupling matrix.

The coefficients β_σ of the Booker quartic equation (23) are conected to the eigenvalues h_σ by the well-known root-coefficient relations [11, p.717]

$$\beta_1 = \sum h_\sigma$$

$$\beta_2 = \sum_{\nu > \sigma} h_\sigma h_\nu \tag{25}$$

$$\beta_3 = \sum_{\rho > \nu > \sigma} h_\sigma h_\nu h_\rho$$

$$\beta_4 = \prod h_\sigma$$

where $\sigma = 1,2,3,4$ for β_1 and β_4, $\sigma = 1,2,3$, $\nu = 2,3,4$ for β_2 and $\sigma = 1,2$, $\nu = 2,3$, $\rho = 3,4$ for β_3. The coefficient β_σ is also equal to the sum of all the principal minors of order σ in $\mathbf{C}$ [11, p.718]. Therefore, for $\sigma = 1$ one obtains the trace of $\mathbf{C}$, i.e. according to the first equation in (25)

$$Tr\left[\mathbf{C}^{(s)} \right] = \sum_{\sigma=1}^{4} h_\sigma^{(s)} \tag{26}$$

(ii) *Well known from studies of wave propagation in the ionosphere*

When the eigenvalues of the coupling matrix observe antysimmetry, i. e. if one may write

$$h_3 = -h_1 \tag{27}$$

$$h_4 = -h_2$$

the Booker quartic equation reduces to the biquadratic form

$$\left(h^2 - h_1^2 \right) \left(h^2 - h_2^2 \right) = 0 \tag{28}$$

and $\beta_1 = \beta_3 = 0$.

For the sth-layer, a diagonal matrix

$$\mathbf{H}^{(s)} = diag \left[h_1^{(s)}, h_2^{(s)}, h_3^{(s)}, h_4^{(s)} \right] \tag{29}$$

may be obtained using the standard expression

$$\mathbf{H}^{(s)} = \left[\mathbf{U}^{(s)} \right]^{-1} \mathbf{C}^{(s)} . \mathbf{U}^{(s)} \tag{30}$$

where $\mathbf{U}^{(s)}$ is the diagonalizer matrix for $\mathbf{C}^{(s)}$, i.e.

$$\mathbf{U}^{(s)} = \left[\mathbf{u}_1^{(s)}, \mathbf{u}_2^{(s)}, \mathbf{u}_3^{(s)}, \mathbf{u}_4^{(s)} \right] \tag{31}$$

according to Eq. (24).

Introducing a new vector

$$\mathbf{a}^{(s)}(x) = \left[a_1^{(s)}(x), a_2^{(s)}(x), a_3^{(s)}(x), a_4^{(s)}(x) \right]^T \tag{32}$$

related to the $\boldsymbol{\psi}^{(s)}(x)$ field vector by

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)}(x) = \mathbf{U}^{(s)} . \mathbf{a}^{(s)}(x) \tag{33}$$

then Eq. (20) reduces to

$$\frac{d}{dx} \mathbf{a}^{(s)}(x) = -j \mathbf{H}^{(s)} . \mathbf{a}^{(s)}(x) \tag{34}$$

whose solution may be written in the form $(1 \leq \sigma \leq 4)$

$$a_\sigma^{(s)} = A_\sigma^{(s)} e^{-j h_\sigma^{(s)} (x - x_{s-1})} \tag{35}$$

where $A_\sigma^{(s)}$ is an amplitude referenced to the entrance coordinate of the sth-layer, $x = x_{s-1}$ (see Fig.1). Therefore, the $\boldsymbol{\psi}^{(s)}(x)$ field vector for the sth-layer is

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)}(x)=\sum_{\sigma=1}^{4} A_{\sigma}^{(s)}\mathbf{u}_{\sigma}^{(s)}e^{-jh_{\sigma}^{(s)}(x-x_{s-1})} \tag{36}$$

The application of the boundary conditions is now a straightforward task, since it reduces to imposing the continuity of $\boldsymbol{\psi}$ on the several interfaces of the multilayered structure.

The formalism of this Section is a generalization for bianisotropic media of a previous work of the authors[12].

3 - REFLECTION AND TRANSMISSION OF PLANE WAVES - AN EXAMPLE

In this Section the matrix formalism developed in the former Section is applied to an example of reflection and transmission of plane waves at an air-magnetoplasma interface as depicted in Fig. 2 [9, pp.287-291]. Medium 1 is the air and medium 2 is a magnetoplasma. The interface is located at $x=0$.

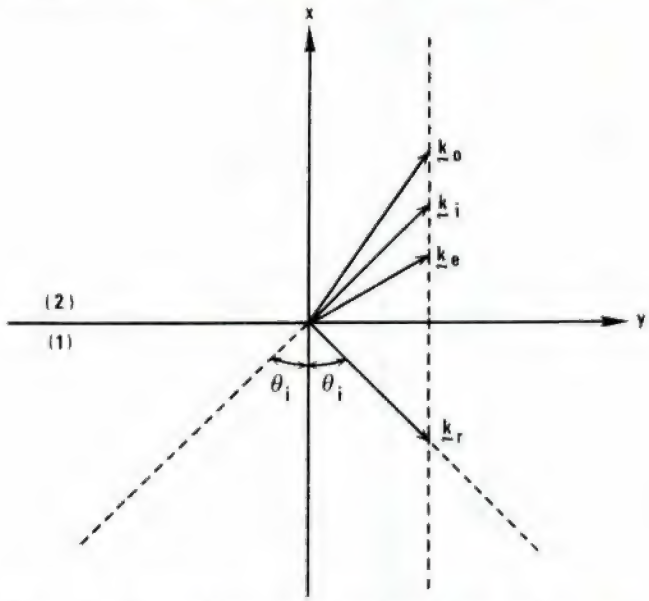


Fig. 2 - Boundary - value problem of an air magnetoplasma interface. The plane of incidence is the xy plane ($k_z = 0$). The externally applied constant magnetic field is z - directed and the wave is propagating normal to the applied field.

The externally applied constant magnetic field is z-directed, i. e. $\mathbf{B}_c = B\,\hat{\mathbf{z}}$. Hence, for $s=2$ (medium 2), Eqs. (5) reduce to

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\omega).\mathbf{E} \tag{37}$$

$$\mathbf{B}=\mu_o\mathbf{H}$$

where [9, pp.264-5]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}=\begin{bmatrix} \varepsilon_\perp & j\varepsilon_x & 0 \\ -j\varepsilon_x & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{bmatrix} \tag{38}$$

and

$$\varepsilon_\perp(\omega)=1-\frac{X_0}{1-Y_0^2}$$

$$\varepsilon_x(\omega)=-\frac{X_0Y_0}{1-Y_0^2} \tag{39}$$

$$\varepsilon_\parallel(\omega)=1-X_0$$

with the frequency dependent coefficients X_o and Y_o given by

$$X_0=\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \quad Y_0=\frac{\omega_b}{\omega} \tag{40}$$

and where ω_p is the plasma frequency and ω_b the gyrofrequency of the electrons. When $B_c=0$, $\omega_b=Y_o=\varepsilon_x=0$,,

$$\varepsilon_\parallel = \varepsilon_\perp=\varepsilon=1-X_0 \tag{41}$$

and the plasma behaves like an isotropic medium.

The plane of incidence is the xy plane which is perpendicular to the air-magnetoplasma interface, thus making $k_z=0$. According to Fig. 2, one has, with $k_o=\omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$

$$k_y=k_0 \sin\theta_i \tag{42}$$

where θ_i is the angle between the incident wave vector $\mathbf{k}_i$ and the positive x-axis.

In medium 1, $\boldsymbol{\psi}^{(1)}$ may be decomposed into incident $\boldsymbol{\psi}_i$ and reflected $\boldsymbol{\psi}_r$ field vectors. According to Eqs. (21) one has for the air region

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \tag{43}$$

where

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{h_a^2}{\omega\varepsilon_0} \\ \omega\varepsilon_o & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} 0 & -\omega\mu_o \\ -\dfrac{h_a^2}{\omega\mu_0} & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

and with

$$h_a^2 = k_o^2 - k_y^2 . \tag{45}$$

For this isotropic region there are only two distinct eigenvalues for $\mathbf{C}^{(1)}$: $\pm$ ha. From Eqs. (42, 45) one has

$$h_a = k_o \cos\theta_i . \tag{46}$$

For the incident (reflected) field vector $\boldsymbol{\psi}_i$ ($\boldsymbol{\psi}_r$) one chooses $h_o^{(1)} = +$ha(-ha). Hence, the incident and the reflected wave vectors are given, respectively, by

$$\mathbf{k}_i = h_a \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{k}_r = -h_a \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} \tag{47}$$

An appropriate choice for $C^{(1)}$ eigenvectors(iii) gives (see Eq. (36))

$$\boldsymbol{\psi}_i(x) = A_\perp \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\dfrac{h_a}{\omega\mu_o} \end{bmatrix} e^{-jh_a x} + A_\parallel \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\omega\varepsilon_o}{h_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-jh_a x} \tag{48}$$

and

$$\boldsymbol{\psi}_r(x) = B_\perp \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dfrac{h_a}{\omega\mu_o} \end{bmatrix} e^{jh_a x} + B_\parallel \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\omega\varepsilon_o}{h_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{jh_a x} \tag{49}$$

where $A_\perp$, $B_\perp$ define the perpendicular polarization and $A_\parallel$, $B_\parallel$ the parallel polarization.

For the magnetoplasma, according to Eqs. (37-38), one obtains from Eqs. (21)

$$\mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_o \end{bmatrix} \tag{50}$$

(iii) There must be four eigenvectors forming an orthogonal set (see Section 2).

where

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} -j\dfrac{\varepsilon_x}{\varepsilon_\perp}k_y & \dfrac{\varepsilon_\perp k_o^2 - k_y^2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_\perp} \\ \dfrac{\omega\varepsilon_o}{\varepsilon_\perp}\left(\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_x^2\right) & j\dfrac{\varepsilon_x}{\varepsilon_\perp}k_y \end{bmatrix} \tag{51}$$

and

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & -\omega\mu_o \\ \dfrac{k_y^2 - \varepsilon_\parallel k_o^2}{\omega\mu_o} & 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

In this gyrotropic case the four roots of the Booker quartic equation (23) are $\pm h_o$ and $\pm h_e$, with

$$h_o^2 = \varepsilon_\parallel k_o^2 - k_y^2$$

$$h_e^2 = \frac{1}{\varepsilon_\perp}\left(\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_x^2\right)k_o^2 - k_y^2 \tag{53}$$

therefore observing antisymmetry (see Eq. (27)) and making null the trace of the corresponding coupling matrix, i. e.

$$Tr\left|\mathbf{C}^{(2)}\right| = 0 \tag{54}$$

a result which agrees with Eqs. (50-52). One should note that he (ho) is associated with the extraordinary (ordinary) wave as it does (not) depend on B_c. Taking into account that for medium 2 only the eigenvectors corresponding to eigenvalues of positive value can propagate into the magnetoplasma, the transmitted field vector is

$$\boldsymbol{\psi}_t(x) = C_o \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \iota_o \end{bmatrix} e^{-jh_o x} + C_e \begin{bmatrix} 1 \\ \iota_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-jh_e x} \tag{55}$$

where

$$\iota_o = -\frac{h_0}{\omega\mu_o}, \quad \iota_e = \frac{\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_x^2\right)}{\varepsilon_\perp h_e - j\varepsilon_x k_y} \tag{56}$$

according to Eq. (24). Hence, in the magnetoplasma, there are two transmitted wave vectors

$$\mathbf{k}_o = h_o\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{k}_e = h_e\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} \tag{57}$$

with h_o, $h_e > 0$ as depicted in Fig. 2(iv).

The boundary conditions in the $x = 0$ plane reduce to

$$\boldsymbol{\psi}_i(0) + \boldsymbol{\psi}_r(0) = \boldsymbol{\psi}_t(0) \tag{58}$$

Therefore,

$$\begin{bmatrix} C_o \\ C_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iota_\perp & 0 \\ 0 & \iota_\parallel \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_\perp \\ A_\parallel \end{bmatrix} \tag{59}$$

and

$$\begin{bmatrix} B_\perp \\ B_\parallel \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_\perp & 0 \\ 0 & \Gamma_\parallel \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_\perp \\ A_\parallel \end{bmatrix} \tag{60}$$

with, for $\theta_i \neq \pi/2$,

$$\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp = \frac{2}{1 + h_0/h_a} \tag{61}$$

$$\tau_\parallel = 1 + \Gamma_\parallel = \frac{2}{1 + \tau_e h_a/\omega\varepsilon_o}$$

Hence, according to Eqs. (59-60), the perpendicular polarization excites the ordinary wave while the parallel polarization excites the extraordinary wave, existing no coupling between the two polarizations in medium 1.

When $B_c = 0$, Eq. (41) is valid. In this case, according to Eqs. (53)

$$h_o^2 = h_e^2 = \varepsilon k_o^2 - k_y^2 \tag{62}$$

and the second equation of (61) reduces to

$$\tau_\parallel = \frac{2}{1 + \varepsilon h_a/h_o} \tag{63}$$

In the limit case of $\varepsilon \rightarrow 1$ one gets the expected results:

$$\Gamma_\perp = \Gamma_\parallel = 0 \quad , \quad \tau_\perp = \tau_\parallel = 1 \tag{64}$$

For the particular case of normal incidence ($\theta_i = 0$) one obtains from Eqs. (61)

$$\tau_\perp = \frac{2}{1 + \varepsilon_\parallel^{1/2}} \quad , \quad \tau_\parallel = \frac{2}{1 + \left| \left(\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_x^2 \right) / \varepsilon_\perp \right|^{1/2}} \tag{65}$$

However, Eqs. (61) cannot be applied for grazing incidence ($\theta_i = \pi/2$) as $h_a = 0$. Nevertheless, a different analysis is easily carried on in this case: the ordinary (extraordinary) wave cannot be excited as the continuity for H_y (E_y) on $x = 0$ is not observed. Therefore, $\tau_\perp = \tau_\parallel = 0$. Moreover, due to the uniformity along the y-direction, $\Gamma_\perp = \Gamma_\parallel = 0$.

(iv) *One should bear in mind the difference between the ordinary wave vector* $\mathbf{k_o}$ *and the vacuum wave number* $k_o = \omega(\varepsilon_o \mu_o)^{1/2}$

4. TRANSFER MATRIX

For the layered medium of Fig. 1 one can define a transfer matrix relating $\boldsymbol{\psi}^{(n)}(t)$ to $\boldsymbol{\psi}^{(1)}(0)$.

The boundary conditions to be considered are

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)}(x_s) = \boldsymbol{\psi}^{(s+1)}(x_s) \tag{66}$$

with $1 \leq s \leq n-1$. However, according to Eq. (33) these boundary conditions may be also written as

$$\mathbf{a}^{(s+1)}(x_s) = \mathbf{B}_{s+1,s} . \mathbf{a}^{(s)}(x_s) \tag{67}$$

also with $1 \leq s \leq n-1$ and where matrices $\mathbf{B}_{ij}$ ($2 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$) are given by

$$\mathbf{B}_{ij} = \left[\mathbf{U}^{(i)} \right]^{-1} . \mathbf{U}^{(j)} \tag{68}$$

One can introduce transmission matrices $\boldsymbol{\Phi}^{(s)}$ with $2 \leq s \leq n-1$ so that

$$\mathbf{a}^{(s)}(x_s) = \boldsymbol{\Phi}^{(s)} . \mathbf{a}^{(s)}(x_{s-1}) \tag{69}$$

where $\boldsymbol{\Phi}^{(s)}$ are diagonal matrices given by

$$\boldsymbol{\Phi}^{(s)} = diag \left| e^{-jh_1^{(s)}\Delta x^{(s)}} , e^{-jh_2^{(s)}\Delta x^{(s)}} , e^{-jh_3^{(s)}\Delta x^{(s)}} , e^{-jh_4^{(s)}\Delta x^{(s)}} \right| \tag{70}$$

and where $\Delta x^{(s)}$ is the thickness of the sth-layer, i. e.

$$\Delta x^{(s)} = x_s - x_{s-1} \tag{71}$$

with $2 \leq s \leq n-1$.

From Eqs. (67, 69) one has

$$\mathbf{a}^{(n)}(t) = \mathbf{Q} . \mathbf{a}^{(1)}(0) \tag{72}$$

where

$$\mathbf{Q}=\mathbf{B}_{n,n-1}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{(n-1)}\ldots\mathbf{B}_{32}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\cdot\mathbf{B}_{21} \tag{73}$$

Applying Eq. (33) for s=1,n to Eq. (72) one finally obtains the transfer matrix **T** defined by

$$\boldsymbol{\Psi}^{(n)}(t)=\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\Psi}^{(1)}(0) \tag{74}$$

as

$$\mathbf{T}=\mathbf{U}^{(n-1)}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{(n-1)}\ldots\mathbf{B}_{32}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\cdot\left|\mathbf{U}^{(2)}\right|^{-1} \tag{75}$$

One should note that $\boldsymbol{\Psi}^{(1)}(0)$ is the total field vector and not the incident field vector $\boldsymbol{\Psi}_i(0)$. In fact, if $\boldsymbol{\Psi}_r(0)$ is the reflected part of $\boldsymbol{\Psi}^{(1)}(0)$, Eq. (74) leads to

$$\boldsymbol{\Psi}_t(t)=\mathbf{T}.[\boldsymbol{\Psi}_i(0)+\boldsymbol{\Psi}_r(0)] \tag{76}$$

where $\boldsymbol{\Psi}_t(t)=\boldsymbol{\Psi}^{(n)}(t)$ is the transmitted field vector.

For the particular case of n=2 as in Fig. 2 (Section 3), the matrix **T** reduces to the unit matrix and thus Eq. (76) reduces to Eq. (58) in Section 3. For a slab between media 1 and 3, i. e. n=3, the transfer matrix is

$$\mathbf{T}=\mathbf{U}^{(2)}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\cdot\left|\mathbf{U}^{(2)}\right|^{-1} \tag{77}$$

5. GUIDED WAVE STRUCTURES

In this Section guided waves along the z-direction in the open waveguide of Fig. 1 will be considered. Due to the uniformity along the y-direction $k_y=0$ and k_z is the longitudinal wave number to be calculated.

In the first part of this Section some characteristics concerning the matrix equations (16, 20) at optical frequencies will be analysed due to the practical importance of optical waveguides. In the second part, the modal equation for open multilayered bianisotropic waveguides will be derived.

If one disregards optical activity, $\xi^{(s)}=\zeta^{(s)}=0$ [2, 5]. For optical frequencies one may also write $\mu^{(s)}=1$ [13, p.132]. Hence, the matrix $\mathbf{M}^{(s)}$ defined in Eq. (7) reduces to

$$\mathbf{M}^{(s)}=\begin{bmatrix}\varepsilon_o\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} & 0\\ 0 & \mu_o\mathbf{1}\end{bmatrix} \tag{78}$$

Moreover, if only lossless (uniaxial or biaxial) crystals are considered, the dielectric tensor is symmetric [9, p.182]. Therefore

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{79}$$

where, as usual in this paper, (s) superscripts are dropped away to simplify the notation.

Accordingly one has from Eqs. (17, 21)

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} & 0 & -\dfrac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} & \dfrac{k_z}{\omega\varepsilon_o\varepsilon_{xx}}\\ -\dfrac{k_z}{\omega\mu_o} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{80}$$

and

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & \omega\mu_o & 0 & 0\\ \dfrac{\Delta_{zz}k_o^2-\varepsilon_{xx}k_z^2}{\omega\mu_o\varepsilon_{xx}} & 0 & -\dfrac{\omega\varepsilon_o}{\varepsilon_{xx}}\Delta_{yz} & \dfrac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}k_z\\ -\dfrac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}k_z & 0 & -\dfrac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}}k_z & \dfrac{k_z^2-\varepsilon_{xx}k_o^2}{\omega\mu_o\varepsilon_{xx}}\\ \dfrac{\omega\varepsilon_o}{\varepsilon_{xx}}\Delta_{yz} & 0 & -\dfrac{\omega\varepsilon_o}{\varepsilon_{xx}}\Delta_{yy} & -\dfrac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}}k_z\end{bmatrix} \tag{81}$$

where Δ_{ij} is the algebraic complement of the ε_{ij} element of matrix $\boldsymbol{\varepsilon}$ given in Eq. (79).

For the equatorial configuration [4, 12] in which $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yz}=0$, $\Delta_{yz}=0$ and the coupling matrix may be written in the form

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{TE} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{TM} \end{bmatrix} \tag{82}$$

thus making possible the existence of TE and TM modes, provided that all the layers of the waveguide belong to the equatorial configuration, i. e. $\varepsilon_{xy}^{(s)}=\varepsilon_{yz}^{(s)}=0$ for every s ($1\leq s\leq n$). (v) Then, the $\mathbf{\Psi}$ vector may be decomposed into two field vectors

$$\mathbf{\Psi}_{TE}=\left|E_y\ ,\ H_z\right|^T\ ,\ \mathbf{\Psi}_{TM}=\left|E_z\ ,\ H_y\right|^T \tag{83}$$

therefore accomplishing the separation of Eq. (20) into two independent equations - one for TE modes and another for TM modes. Similarly one has (see Eqs. (15))

$$\Phi_{TE}=H_x\ ,\ \Phi_{TM}=E_x \tag{84}$$

One should note that the chosen arrangement for the $\mathbf{\Psi}$ vector defined in Eqs. (15) is finally understood if one bears in mind Eqs. (83).

For the particular cases of longitudinal and polar configurations [4, 12], Eqs. (80-81) may be further simplified. In fact, for these two anisotropic configurations, the eigenvalues of the coupling matrices observe antisymmetry (see Eqs. (27)), therefore making null the trace of these matrices (see Eq. (26)):

$$Tr\quad [\mathbf{C}]=0 \tag{85}$$

For the unaxial longitudinal configuration, $\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$, $\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{\perp}$, $\Delta_{zz}=\varepsilon_{\parallel}\ \varepsilon_{\perp}$ (vi) and the transverse wavenumbers are given by [12]

$$h_o^2=\varepsilon_{\perp}k_o^2-k_z^2\quad ,\quad h_e^2=\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{xx}}(\varepsilon_{\parallel}k_o^2-k_z^2) \tag{86}$$

For the unaxial polar configuration, $\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{xy}=0$, $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{\perp}$, $\Delta_{xx}=\varepsilon_{\parallel}\ \varepsilon_{\perp}$ (vi) and the transverse wavenumbers are given by [12]

$$h_o^2=\varepsilon_{\perp}k_o^2-k_z^2\quad ,\quad h_e^2=\varepsilon_{\parallel}\ k_o^2-\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{\perp}}k_z^2 \tag{87}$$

Next, let us find the modal equation for the open waveguide on Fig. 1. For the general case, k_z is complex as well as the transverse wavenumbers. Henceforward, it will be assumed that the eigenvalues for the exterior layers (i. e. for s=1, n) are such that

$$Re(h_1)>0\ ,\ Re(h_2)>0\ .$$
$$Re(h_3)<0\ ,\ Re(h_4)<0\ . \tag{88}$$

Therefore vectors $\mathbf{a}^{(1)}(x)$ and $\mathbf{a}^{(n)}(x)$ introduced in Eq. (32) may be decomposed into the two following parts (s=1, n):

$$\mathbf{a}^{(s)}(x)=\left[\mathbf{a}_+^{(s)}(x)\ ,\ \mathbf{a}_-^{(s)}(x)\right]^T \tag{89}$$

where

$$\mathbf{a}_+^{(s)}(x)=\mathbf{A}_+^{(s)}\begin{bmatrix} e^{-jh_1^{(s)}(x-x_{s-1})} \\ e^{-jh_2^{(s)}(x-x_{s-1})} \end{bmatrix} \tag{90}$$

and

$$\mathbf{a}_-^{(s)}(x)=\mathbf{A}_-^{(s)}\begin{bmatrix} e^{-jh_3^{(s)}(x-x_{s-1})} \\ e^{-jh_4^{(s)}(x-x_{s-1})} \end{bmatrix} \tag{91}$$

$\mathbf{A}_+^{(s)}$ and $\mathbf{A}_-^{(s)}$ are 2×2 diagonal matrices whose elements are complex amplitudes. While $\mathbf{a}_+^{(s)}(x)$ represents waves propagating in the positive x-direction, $\mathbf{a}_-^{(s)}(x)$ represents waves propagating in the negative x-direction. For guided wave propagation in the open multilayered waveguides of Fig. 1, one must have

---

(v) *Some layer(s) may be isotropic*

$$\mathbf{a}_{-}^{(n)}(x)=\mathbf{a}_{+}^{(1)}(x)=\mathbf{0} \tag{92}$$

Therefore, Eq. (72) in Section 4 may now be written as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{+}^{(n)}(t) \\ \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{a}_{-}^{(1)}(0) \end{bmatrix} \tag{93}$$

where $\mathbf{Q}_{ij}$ are 2×2 submatrices of $\mathbf{Q}$ given in Eq. (73). A nontrivial solution for Eq. (93) is found if, and only if

$$det \quad [\mathbf{Q}_{22}]=0 \tag{94}$$

which is the searched modal equation for the open waveguide of Fig. 1, allowing the calculation of the longitudinal wavenumber k_z, which is, for the general case, a complex number.

In spite of the fact that the derivation of Eq. (94) was made bearing in mind waveguides used in integrated optics, the method is quite general in the sense that it is applicable to open multilayered bianisotropic waveguides.

6. CONCLUSIONS

In this paper a matrix formalism suitable for the analysis, in frequency domain, of multilayered bianisotropic media is developed. The feature which distinguishes this analysis from other similar methods is its flexibility in handling non-guided wave propagation as well as guided wave propagation in multilayered bianisotropic structures.

As an example of application of the developed matrix formalism, the boundary-value problem of an air magnetoplasma interface was solved. A generalization of this boundary-value problem for a medium with an arbitrary number of bianisotropic layers was also presented.

Finally, some relevant characteristics of guided wave structures at optical frequencies were analysed and the modal equation for an open multilayered bianisotropic waveguide was derived. Although only open waveguides were considered, the matrix formalism presented in this paper can be also applicable to closed waveguides. However, this special case will be presented elsewhere.

The method presented in this paper covers a wide range of phenomena related to electromagnetic wave propagation in time-dispersive bianisotropic media and is particularly suited for computer calculations concerning multilayered structures.

(vi) *For the uniaxial crystal, $\varepsilon_o(\varepsilon_e)$ is the ordinary (extraordinary) relative dielectric constant*

REFERENCES

[1] - S. Teitler and B.W. Henvis, "Refraction in stratified, anisotropic media", J. Opt. Soc. Am., vol. 60, pp. 830-834, June 1970.

[2] - D.W. Berreman, "Optics in stratified and anisotropic media: 4×4 matrix formulation", J. Opt. Soc. Am., vol. 62, pp. 502-510, April 1972

[3] - P. Yeh, "Electromagnetic propagation in birefringent layered media", J. Opt. Soc. Am., vol. 69, pp. 742-756, May 1979.

[4] - O. Schwelb, "Network representation and transverse resonance for layered anisotropic dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-30, pp. 899-905, June 1982.

[5] - C.M. Knowne, "Fourier transformed matrix method of finding propagation characteristics of complex anisotropic layered media", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp. 1617-1625, Dec. 1984.

[6] - P.J. Lin-Chung and S. Teitler, "4×4 Matrix formalisms for optics in stratified anisotropic media", J. Opt. Soc. Am., vol. 1, pp. 703-705, July 1984.

[7] - R.S. Weis and T.K. Gaylord, "Electromagnetic transmission and reflection characteristics of anisotropic multilayered structures", J. Opt. Soc. Am., vol. 4, pp. 1720-1740, Sept. 1987.

[8] - K. Rokushima, J. Yamakita, S. Mori and K. Tominaga, "Unified approach to wave diffraction by space-time periodic anisotropic media", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-35, pp. 937-945, Nov. 1987.

[9] - H.C. Chen, "Theory of Electromagnetic Waves - a coordinate-free approach", McGraw-Hill Book Company, I.S.E., 1985.

[10] - J.A. Kong, "Electromagnetic Wave Theory", John Wiley & Sons, 1986.
[11] C.R. Wylie, and L.C. Barret, "Advanced Engineering Mathematics", McGraw-Hill International Book Company, I.S.E., 1982.
[12] - C. Paiva, J. Figanier and A.M. Barbosa, "Discussão das principais configurações uniaxiais em guias dieléctricos planares estratificados e transversalmente ilimitados", Internal Report-01/86, CAPS-INIC, Nov. 1986.
[13] - L. Landau and E. Lifchitz, "Électrodynamique des Milieux Continus", MIR, Moscow, 1969.